

# UFPA

PPGEC

# Universidade Federal do Pará

---



Arlene Maria Alves

## **Resistência Máxima à Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento Tipo Stud**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Dissertação orientada pelo Professor Maurício de Pina Ferreira

Belém – Pará – Brasil

2024

Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil



**Arlene Maria Alves**

**Resistência Máxima à Punção em Lajes Lisas com  
Armadura de Cisalhamento Tipo Stud**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Orientador: Prof. Maurício de Pina Ferreira

Belém, 26 de junho de 2024.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTORA: Arlene Maria Alves

TÍTULO: Resistência Máxima à Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento Tipo Stud.

GRAU: Mestre ANO: 2024

É concedida à Universidade Federal do Pará permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito da autora.

---

**Arlene Maria Alves**

Av. Augusto Corrêa, no 1, Campus Universitário do Guamá, Laboratório de Engenharia Civil.  
Guamá, Belém, Pará. CEP 66075-970.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

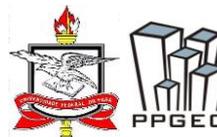
A474r Alves, Arlene Maria.  
Resistência Máxima à Punção em Lajes Lisas com Armadura de  
Cisalhamento Tipo Stud / Arlene Maria Alves. — 2024.  
103 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Maurício de Pina Ferreira  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,  
Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil, Belém, 2024.

1. Concreto armado. 2. Lajes lisas. 3. Armadura de  
cisalhamento. 4. Resistência máxima à punção. 5. Modelo de  
bielas e tirantes. I.Título.

CDD 624

---



# RESISTÊNCIA MÁXIMA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS COM ARMADURA DE CISALHAMENTO TIPO STUD

AUTORA:

**ARLENE MARIA ALVES**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DO INSTITUTO DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRA EM ENGENHARIA CIVIL NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO EM: 24/06/2024.

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MAURICIO DE PINA FERREIRA  
Data: 27/06/2024 15:35:02-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Maurício de Pina Ferreira  
Orientador (UFPA)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** DANIEL CARLOS TAISSUM CARDOSO  
Data: 27/06/2024 15:46:57-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Daniel Carlos Taissum Cardoso  
Membro Externo (PUC/RJ)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** LEANDRO MOUTA TRAUTWEIN  
Data: 05/07/2024 02:57:38-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein  
Membro Externo (Unicamp)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** EDILSON MORAIS LIMA E SILVA  
Data: 02/07/2024 14:17:18-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Edilson Morais Lima e Silva  
Membro Interno (UFPA)

isto:

---

Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira  
Coordenador do PPGEC / ITEC / UFPA

---

Dedico este trabalho aos meus familiares, cujo apoio foi fundamental nesta caminhada.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me manter firme.

Ao Prof. Maurício de Pina Ferreira, pela orientação, dedicação e incentivo que foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

A Mayara Gonçalves Costa, ao Manoel José Mangabeira Pereira Filho e ao Erick da Silva Rocha, por toda a ajuda ao longo desta pesquisa, e aos demais colegas do NUMEA pelo apoio e troca de conhecimentos.

Aos meus familiares, em especial à minha mãe Marlene, ao meu pai Aderson e ao meu tio José Raimundo, por serem minha base e meus incentivadores durante esta jornada.

Ao meu amado parceiro Jean Carlos, pelo companheirismo.

Aos meus amigos da graduação, pela amizade e todos os momentos de descontração.

Ao meu mentor na engenharia estrutural, Eng. Francisco de Assis Gonçalves, por todos os ensinamentos acerca da engenharia e da vida.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

ALVES, A. M. **Resistência Máxima à Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento Tipo Stud**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil. 2024.

A resistência à punção representa um desafio significativo no projeto de lajes lisas, pois é um fenômeno complexo cuja compreensão está longe de ser completa. Atualmente, o dimensionamento à punção de lajes lisas com armadura de cisalhamento é comumente feito seguindo recomendações normativas, as quais adotam uma abordagem empírica para calcular a resistência máxima à punção. Isso é feito multiplicando a resistência à punção de lajes sem armadura de cisalhamento por um fator específico, determinado conforme o tipo de armadura de cisalhamento, obtido por meio da comparação com resultados de ensaios. Normalmente, esse fator é considerado como constante. Entretanto, utilizar uma formulação que considere apenas a influência do tipo de armadura de cisalhamento, através de um fator constante, pode levar a resultados inseguros. Nesse contexto, este trabalho busca contribuir com uma nova metodologia, fundamentada no modelo de bielas e tirantes, para estimar a resistência máxima à punção em lajes lisas com armadura de cisalhamento tipo stud, distribuída em arranjos radiais e submetidas à carregamento simétrico. Para validar o método, montou-se um banco de dados contendo 15 resultados experimentais de lajes lisas com armadura de cisalhamento que falharam na resistência máxima à punção. A análise dos resultados ocorreu por meio de comparações entre os resultados da razão da carga de ruptura experimental com a teórica. Além disso, o método foi comparado com estimativas de resistência à punção obtidas por recomendações normativas e por métodos baseados em modelos de bielas e tirantes. Por fim, todos os métodos foram avaliados através de análise estatística, análise de dispersão e penalização segundo o “*Demeter Points Classification*” (DPC).

Palavras-chave: concreto armado; lajes lisas; armadura de cisalhamento; resistência máxima à punção; modelo de bielas e tirantes.

## ABSTRACT

ALVES, A. M. **Maximum Punching Resistance in Flat Slabs with Stud Type Shear Reinforcement.** Master's thesis, Institute of Technology, Federal University of Pará, Belém, Pará, Brazil. 2024.

Punching resistance represents a significant challenge in the design of flat slabs, as it is a complex phenomenon whose understanding is far from complete. Currently, the punching shear dimensioning of flat slabs with shear reinforcement is commonly done following normative recommendations, which adopt an empirical approach to calculate the maximum punching resistance. This is done by multiplying the punching resistance of slabs without shear reinforcement by a specific factor, determined according to the type of shear reinforcement, obtained through comparison with test results. Normally, this factor is considered to be constant. However, using a formulation that only considers the influence of the type of shear reinforcement, through a constant factor, can lead to unsafe results. In this context, this work seeks to contribute with a new methodology, based on the strut-and-tie model, to estimate the maximum punching resistance in flat slabs with stud type shear reinforcement, distributed in radial arrangements and subjected to symmetrical loading. To validate the method, a database was created containing 15 experimental results of flat slabs with shear reinforcement that failed at maximum punching resistance. The analysis of the results occurred through comparisons between the results of the experimental rupture and theoretical rupture load ratio. Furthermore, the method was compared with estimates of punching resistance obtained by normative recommendations and by methods based on strut-and-tie models. Finally, all methods were evaluated through statistical analysis, dispersion analysis and penalization according to the “Demeter Points Classification” (DPC).

Keywords: reinforced concrete; flat slabs; shear reinforcement; maximum punching resistance; strut-and-tie model.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Elementos de concreto armado com Regiões B e D: (a) consolo duplo; (b) nós de pórtico e abertura em viga; (c) apoio em dente e consolo simples; (d) ligação laje-pilar (Adaptado de SILVA e GIONGO, 2000).....	1
Figura 1.2 – Ruptura por punção em ligação laje-pilar: (a) região crítica da laje com carregamento distribuído; (b) formação do cone de punção; (c) destacamento do concreto; (d) ruptura por punção.....	2
Figura 1.3 – Caminho de carga (Adaptado de BRANTSCHEN, 2016).....	3
Figura 2.1 – Modos de ruptura de lajes lisas: (a) ruptura por punção de lajes sem armadura de cisalhamento (GUANDALINI, 2005); (b) ruptura por punção com esmagamento da biela (LIPS, 2012); (c) ruptura por punção na região da armadura de cisalhamento (FERREIRA, 2010); (d) ruptura por punção fora da região armada (Adaptado de FERREIRA, 2010); (e) ruptura por flexão com escoamento da armadura (Adaptado de LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012); (f) ruptura por flexão com esmagamento do concreto (HEGGER, HAUSLER e RICKER, 2007).....	8
Figura 2.2 – Carga versus deslocamento em lajes (MENETREY, apud SIQUEIRA, 2021).....	9
Figura 2.3 – Diagrama de esforço cortante e momento fletor radial na ligação laje-pilar (PEREIRA FILHO, 2021).....	10
Figura 2.4 – Fissuras radiais e tangenciais (Adaptado de BRANTSCHEN, 2016).....	11
Figura 2.5 – Modelos de armadura de cisalhamento do tipo conector: (a) single-headed studs on rails (tradução livre: conectores de uma cabeça); (b) double headed stud (tradução livre: conectores de duas cabeças).....	12
Figura 2.6 – Tipos de arranjos de conectores de aço em ligações laje-pilar: (a) arranjo radial; (b) arranjo cruciforme; (c) arranjo em grade (Adaptado de NASCIMENTO, 2020).....	13
Figura 2.7 – Ruptura por punção com o esmagamento da biela de concreto.....	14
Figura 2.8 – Parâmetros que influenciam na resistência ao esmagamento da biela: a) fissuras adjacentes ao pilar (MUTTONI e RUIZ, 2010); b) influência do tipo de armadura na resistência ao esmagamento da biela adjacente ao pilar (adaptado de EINPAUL et al., 2016).....	15
Figura 2.9 – Distância mínima e máxima, conforme o fib Model Code 2020 (2023), para a posição da primeira camada de armadura de cisalhamento.....	16
Figura 2.10 – Curva carga-rotação para lajes com várias taxas de armadura de cisalhamento (LIPS, 2012).....	17

Figura 2.11 – Influência da taxa de armadura de cisalhamento na inclinação da superfície de ruptura (RUIZ e MUTTONI, 2010 e LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012).....	17
Figura 2.12 – Perímetro de controle (Adaptado do ACI 318, 2019).....	19
Figura 2.13 – Perímetro de controle (Adaptado do Eurocode 2, 2023).....	20
Figura 2.14 – Perímetro de controle (Adaptado da ABNT NBR 6118, 2023).....	21
Figura 2.15 – Perímetro de controle (Adaptado do fib Model Code 2020, 2023).....	23
Figura 2.16 – Rotação de segmento rígido em torno de um ponto CR (Adaptado de ANDRA, BAUR e STIGLAT, 1984) .....	25
Figura 2.17 – Seções radiais de uma laje com modelo treliçado: (a) modelo de treliça; (b) formação de fissura na borda do pilar, ocasionando rompimento da ligação U2-00, surgimento de tirante íngreme U2-01 e da biela U0-06; (c) surgimento de outra fissura, ocasionando rompimento da ligação U2-01 e U3-01, surgimento de tirante íngreme U3-02 e da biela U0-07; (d) surgimento de outra fissura, ocasionando rompimento da ligação U3-02 e U4-02, surgimento de tirante íngreme U4-03 e da biela U0-08 (Adaptado de ANDRA, BAUR e STIGLAT, 1984) .....	26
Figura 2.18 – Deslocamento e rotação da laje ao longo do pilar (Adaptado de ANDRA, BAUR e STIGLAT, 1984) .....	27
Figura 2.19 – Modelo de treliça: (a) laje sem armadura de cisalhamento; (b) laje com baixas taxas de armadura de cisalhamento (Adaptado de REGAN, 1994) .....	28
Figura 2.20 – Modelo de bielas e tirantes para lajes armadas ao cisalhamento: (a) modelo com superposição; (b) força $V_c$ transportada pelo concreto; (c) força $V_s$ transportada pela armadura de cisalhamento (Adaptado de RIZK, MARZOUK e TILLER, 2012).....	30
Figura 2.21 – Modelo de bielas e tirantes para lajes com armadura de cisalhamento (Adaptado de LYCKA e STEPANEK, 2017) .....	32
Figura 2.22 – Dimensão do nó e da biela (Adaptado de LYCKA e STEPANEK, 2017) .....	34
Figura 3.1 – Idealização da laje em segmentos radiais.....	39
Figura 3.2 – Segmento axissimétrico .....	40
Figura 3.3 – Bielas em concreto fissurado .....	41
Figura 3.4 – Corte da laje Z3 (BEUTEL, 2002).....	41
Figura 3.5 – Modelo de treliça isostática.....	41
Figura 3.6 – Representação esquemática das forças de compressão e tração .....	42
Figura 3.7 – Variáveis de uma laje lisa .....	43
Figura 3.8 – Modelo proposto de bielas e tirantes em laje lisa .....	44

Figura 3.9 – Concepção das geometrias: (a) geometria dos nós em torno da cabeça dos conectores e da biela principal: (b) detalhe da dimensão do nó; (c) detalhe da dimensão da biela .....	45
Figura 3.10 – Geometria do nó em planta .....	46
Figura 3.11 – Largura limite da região nodal: (a) largura limite (L1) entre as linhas da primeira camada de armadura de cisalhamento, em planta; (b) largura limite (L2) entre a face do pilar e o centro do espaçamento $sR$ , em vista; (c) largura resultante do espraiamento do cone em $35^\circ$ (L3) .....	47
Figura 3.12 – Resistência de um segmento de laje .....	48
Figura 3.13 – Distribuição das principais características dos espécimes que compõe o banco de dados: (a) altura útil (d); (b) resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ); (c) taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ); (d) taxa de armadura de cisalhamento ( $\rho_w$ ) .....	51
Figura 3.14 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje SR1 (Adaptado de FERREIRA et al., 2021); (b) laje PC24 (Adaptado de CANTONE et al., 2019); (c) laje DKA-O (Adaptado de FURCHE, 2017); (d) laje DKA-E (Adaptado de FURCHE, 2017) .....	52
Figura 3.15 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje S1-1 (Adaptado de HALVONIK e MAJTANOVA, 2018); (b) laje S2-1 (Adaptado de HALVONIK e MAJTANOVA, 2018); (c) laje PR1 (Adaptado de EINPAUL et al., 2016); (d) laje PL6 (Adaptado de LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012) .....	53
Figura 3.16 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje PL7 (Adaptado de LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012); (b) laje PP4 (Adaptado de MUTTONI e BUJNAK, 2012); (c) laje PP5 (Adaptado de MUTTONI e BUJNAK, 2012); (d) laje Z2 (Adaptado de BEUTEL, 2002) .....	54
Figura 3.17 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje Z4 (Adaptado de BEUTEL, 2002); (b) laje Z5 (Adaptado de BEUTEL, 2002); (c) laje Z6 (Adaptado de BEUTEL, 2002) .....	55
Figura 4.1 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje SR1; (b) laje PC24 .....	58
Figura 4.2 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje DKA-O; (b) laje DKA-E; (c) laje S1-1; (c) laje S2-1 .....	59
Figura 4.3 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje PR1; (b) laje PL6; (c) laje PL7; (c) laje PP4 .....	60

Figura 4.4 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje PP5; (b) laje Z2; (c) laje Z4; (c) laje Z5 .....	61
Figura 4.5 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje Z6.....	62
Figura 4.6 – Precisão dos métodos na resistência máxima à punção: (a) Método proposto; (b) ACI 318 (2019); (c) Eurocode 2 (2023); (d) ABNT NBR 6118 (2023).....	66
Figura 4.7 – Precisão dos métodos na resistência máxima à punção: (a) fib Model Code 2020 (2023); (b) RIZK, MARZOUK e TILLER (2012); (c) LYCKA e STEPANEK (2017).....	67
Figura 4.8 – Análise quanto à dispersão (curva “box and whiskers”).....	69
Figura 4.9 – Resultado do critério de COLLINS (2001) das lajes: (a) distribuição das lajes; (b) penalidade de Collins .....	70

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Resumo das características das lajes lisas .....	50
Tabela 3.2 – Resumo das características das lajes lisas (Continuação).....	50
Tabela 3.3 – Escala de demérito do critério DPC.....	56
Tabela 4.1 – Resistência máxima da biela.....	57
Tabela 4.2 – Resistência máxima da biela (Continuação).....	58
Tabela 4.3 – Determinação da resistência teórica das lajes.....	62
Tabela 4.4 – Determinação da resistência teórica das lajes (Continuação).....	63
Tabela 4.5 – Comparativo entre os resultados das previsões normativas e do método proposto .....	64
Tabela 4.6 – Comparativo entre os resultados das previsões dos métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017) e do método proposto .....	65
Tabela 4.7 – Resumo dos parâmetros estatísticos obtidos através dos métodos .....	68

## LISTA DE SÍMBOLOS

A seguir, são apresentados os principais símbolos utilizados neste trabalho; outros símbolos são introduzidos e explicados ao longo da dissertação.

$a$	Maior dimensão do pilar
$A_s$	Área de aço de flexão
$A_{sw} = A_v$	Área de aço da armadura de cisalhamento
$b$	Menor dimensão do pilar
$b_d$	Espessura da biela
$c$	Dimensão do pilar
$c'$	Distância do centroide das armaduras de flexão à superfície superior da laje
$c_h$	Distância da superfície superior do conector de aço à superfície superior da laje
$C_q$	Centro de carga
$D$	Diâmetro do pilar
$d$	Altura útil da laje
$d_g$	Diâmetro máximo do agregado graúdo
$d_h$	Dimensão da cabeça do conector
$E_c$	Módulo de elasticidade do concreto
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço de flexão
$E_{sw}$	Módulo de elasticidade da armadura de cisalhamento
$f_{ck}$	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{cd}$	Resistência de cálculo à compressão do concreto
$F_c$	Força de compressão
$f_{cs}$	Tensão admissível de compressão na biela
$f_{cu}$	Resistência ao esmagamento do concreto
$F_R$	Resistência da biela
$F_S$	Força de tração
$f_y$	Tensão de escoamento do aço
$f_{yw} = f_{syw}$	Tensão de escoamento da armadura de cisalhamento
$f_{yw,ef}$	Tensão de escoamento efetiva na armadura de cisalhamento

$h$	Altura da laje
$k$	Parâmetro que considera o efeito de escala
$k_{pb}$	Coefficiente para controlar o incremento de resistência
$k_{dg} = d_{dg}$	Parâmetro que considera o tamanho do agregado
$k_{sys} = \eta_{sys}$	Fator que considerada o desempenho da armadura de cisalhamento
$k_{\psi}$	Parâmetro que considera a rotação da laje
$L$	Largura da biela e do nó CTT
$L_1$	Largura limite entre as linhas da primeira camada de armadura de cisalhamento, em planta
$L_2$	Largura limite entre a face do pilar e o centro do espaçamento $s_R$ , em vista
$L_3$	Largura resultante do espraio do cone em $35^\circ$
$l_{ch}$	Comprimento equivalente
$m_R$	Momento resistente da laje
$m_S$	Momento solicitante da laje
$n_C$	Número de camadas de armadura de cisalhamento
$n_L$	Número de linhas de armadura de cisalhamento
$n_r$	Número de ramos verticais de armadura de cisalhamento no primeiro perímetro
$r_q$	Raio de carregamento da laje
$s$	Espaçamento entre as barras de aço de flexão
$s_0$	Espaçamento entre a face do pilar e a primeira camada de armadura de cisalhamento
$s_1$	Espaçamento entre o primeiro e o segundo perímetro da armadura de cisalhamento
$s_R$	Espaçamento entre os perímetros de armadura de cisalhamento
$u_0 = b_0$	Perímetro do pilar
$u_1 = b_{0,5}$	Perímetro de controle à punção
$u_{out}$	Perímetro de controle à punção para ruptura fora da região da armadura de cisalhamento
$V_{biela}$	Resistência da biela
$V$	Carga vertical máxima de um segmento da laje
$V_c$	Contribuição da parcela resistente do concreto na punção

$V_{nó}$	Resistência do nó
$V_{out}$	Resistência à punção de lajes lisas com superfície de ruptura fora da região das armaduras de cisalhamento
$V_{Rc}$	Resistência à punção de lajes lisas sem armaduras de cisalhamento
$V_{Rmáx}$	Resistência à punção de lajes lisas com esmagamento do concreto adjacente ao pilar
$V_s = V_{sw}$	Contribuição da parcela resistente da armadura de cisalhamento na punção ou resistência da armadura de cisalhamento
$V_{teo}$	Resistência teórica da laje
$V_{tirante}$	Resistência do tirante
$V_u$	Força de ruptura da laje ou carga vertical da laje
$w_s$	Espessura da biela
$x$	Altura do bloco de compressão
$x_1$	Largura do nó
$y$	Altura do nó
$\theta$	Ângulo de inclinação da biela principal
$\beta$	Fator que reduz a contribuição do concreto
$\phi$	Diâmetro da armadura de flexão
$\phi_w$	Diâmetro da armadura de cisalhamento
$\eta_{sys}$	Fator que considerada o desempenho da armadura de cisalhamento
$\rho$	Taxa de armadura de flexão da laje
$\rho_w$	Taxa de armadura de cisalhamento
$\rho_{w,ef}$	Taxa efetiva de armadura de cisalhamento
$\rho_x$	Taxa de armadura de flexão na direção x
$\rho_y$	Taxa de armadura de flexão na direção y
$\sigma_{r,max}$	Máxima tensão de compressão
$\psi$	Rotação da laje

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1.	JUSTIFICATIVA	4
1.2.	OBJETIVOS	4
1.2.1.	Objetivo Geral	4
1.2.2.	Objetivos Específicos	5
1.3.	ESTRUTURA DO TRABALHO	5
<b>2.</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>7</b>
2.1.	PUNÇÃO EM LAJES LISAS	7
2.1.1.	Aspectos gerais	7
2.1.2.	Armaduras de cisalhamento tipo stud	12
2.1.3.	Esmagamento da biela de concreto adjacente ao pilar	14
2.2.	RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS PARA ESTIMATIVA DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO	18
2.2.1.	ACI 318 (2019)	18
2.2.2.	FprEN 1992-1-1 (2023)	20
2.2.3.	ABNT NBR 6118 (2023)	21
2.2.4.	<i>fib</i> Model Code 2020 (2023)	22
2.3.	HISTÓRICO DOS MODELOS DE BIELAS E TIRANTES PARA PUNÇÃO EM LAJES LISAS	24
2.3.1.	ANDRA, BAUR e STIGLAT (1984)	24
2.3.2.	REGAN (1994)	27
2.4.	MODELOS DE BIELAS E TIRANTES PARA ESTIMATIVA DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO	28
2.4.1.	Método de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012)	29
2.4.2.	Método de LYCKA e STEPANEK (2017)	32
<b>3.</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>38</b>
3.1.	METODOLOGIA DA PROPOSTA DE CÁLCULO PARA VERIFICAR A RESISTÊNCIA AO ESMAGAMENTO DA BIELA DE CONCRETO EM LAJES LISAS COM ARMADURA DE CISALHAMENTO TIPO STUD	38
3.1.1.	Premissas fundamentais	39
3.1.2.	Critérios para posicionamento dos banzos, montantes e diagonais	42

3.1.3. Critérios para concepção da geometria dos elementos de treliça	44
3.1.4. Equações para estimativa da resistência da biela principal	47
3.2. METODOLOGIA DA COLETA DO BANCO DE DADOS	49
3.2.1. Apresentação das lajes lisas com armadura de cisalhamento	52
3.3. METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS RESULTADOS	56
<b>4. RESULTADOS</b>	<b>57</b>
4.1. APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO	57
4.2. ANÁLISE COMPARATIVA COM MÉTODOS NORMATIVOS E MODELOS DE BIELAS E TIRANTES	63
<b>5. CONCLUSÃO</b>	<b>71</b>
5.1. SUGESTÕES PARA ATIVIDADES FUTURAS	73
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>74</b>
<b>APÊNDICE A - MEMORIAL DE CÁLCULO DO MÉTODO PROPOSTO</b>	<b>80</b>
<b>ANEXO A – CORTES DAS LAJES DO BANCO DE DADOS</b>	<b>84</b>

# 1. INTRODUÇÃO

As estruturas de concreto podem ser divididas em regiões B e D: as regiões B são aquelas onde as hipóteses de Bernoulli-Navier são válidas, isto é, apresentam distribuição linear de deformações ao longo da seção; as regiões D são aquelas onde, por questões estáticas (ações concentradas e reações) ou geométricas (aberturas ou mudança de seção transversal), ocorrem descontinuidades nas distribuições das tensões. O dimensionamento das regiões B é feito por métodos de cálculo consolidados. Entretanto, para o caso das regiões de descontinuidades, os projetos são feitos através de recomendações práticas ou com base na experiência anterior do projetista (SILVA e GIONGO, 2000).

A delimitação da estrutura em regiões B e D é realizada com base no Princípio de Saint-Venant, que considera a existência de uma região definida por dimensões da mesma ordem de grandeza da seção transversal do elemento carregado, onde ocorre a regularização das tensões. Assim, é possível definir as regiões D a partir das descontinuidades geométricas ou estáticas, considerando distâncias iguais à altura das regiões B adjacentes. A Figura 1.1 apresenta alguns exemplos de estruturas e suas regiões B e D, como consolo duplo, nós de pórtico, abertura em viga, apoio em dente, consolo simples e ligação laje-pilar.

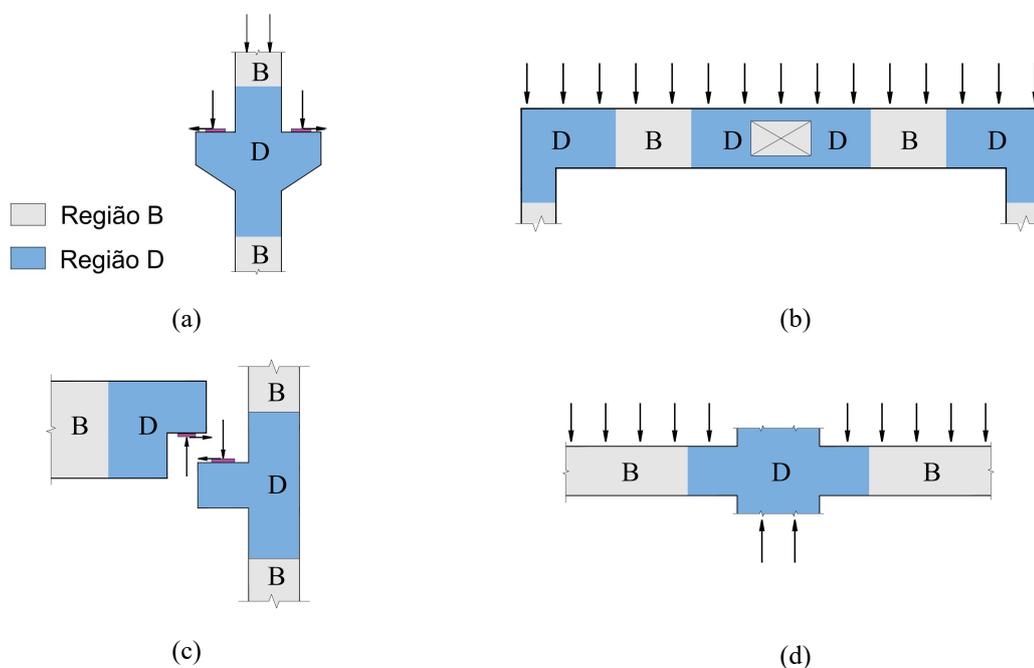


Figura 1.1 – Elementos de concreto armado com Regiões B e D: (a) consolo duplo; (b) nós de pórtico e abertura em viga; (c) apoio em dente e consolo simples; (d) ligação laje-pilar (Adaptado de SILVA e GIONGO, 2000)

Ligações laje-pilar são exemplos de regiões de descontinuidade que apresentam, simultaneamente, descontinuidades geométrica e estática, conforme ilustrado na Figura 1.1d. Essas regiões são pontos críticos nos projetos de estruturas de concreto armado que utilizam sistemas estruturais com lajes lisas, pois são sujeitas a elevadas concentrações de esforço cortante e momento fletor, que podem causar tanto ruptura por flexão quanto ruptura por punção. As falhas por flexão ocorrem após grandes deformações, fornecendo um aviso prévio da ruptura da laje. Em contraste, as deformações de elementos críticos ao cisalhamento são tipicamente muito limitadas antes da ruptura, especialmente quando nenhuma armadura de cisalhamento é usada. Isso torna a punção um modo de ruptura particularmente perigoso. A Figura 1.2 apresenta um esquema da ruptura por punção em uma ligação laje-pilar.

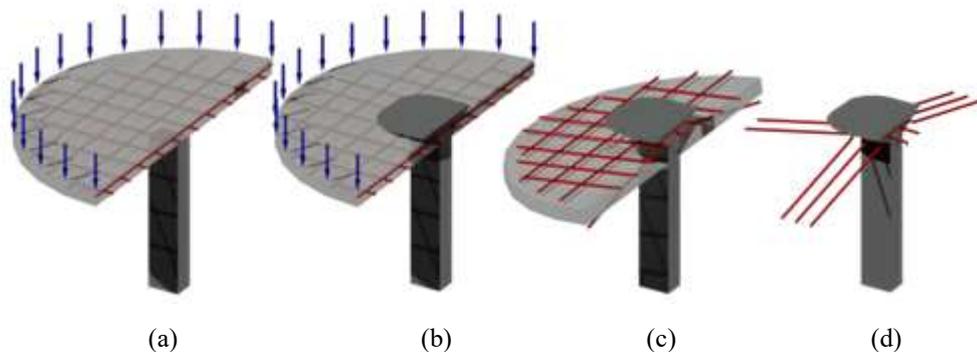


Figura 1.2 – Ruptura por punção em ligação laje-pilar: (a) região crítica da laje com carregamento distribuído; (b) formação do cone de punção; (c) destacamento do concreto; (d) ruptura por punção

A utilização da armadura de cisalhamento é a estratégia técnica mais eficiente para aumentar tanto a resistência à punção quanto a capacidade de deformação das ligações laje-pilar. No entanto, se a taxa de armadura de cisalhamento for muito alta, chega um ponto em que o aumento adicional dessa taxa não resulta em um incremento na resistência à punção, indicando que há um limite superior da influência da armadura. Isso é mostrado nos ensaios experimentais de LIPS (2012). Este limite é representado pela capacidade máxima de punção e, normalmente, é dado pela resistência ao esmagamento das bielas de concreto na periferia do pilar.

Nas últimas décadas, diversas pesquisas têm sido realizadas sobre esse tema, evidenciando a complexidade do fenômeno, que é influenciado pelas condições de ancoragem e pelas regras de detalhamento da armadura de cisalhamento, e pela sua capacidade de controlar a fissuração nas zonas críticas. Apesar dessas investigações, várias normas verificam a resistência máxima

à punção a partir de coeficientes empíricos aplicados à resistência de lajes sem armadura de cisalhamento.

Todavia, é preocupante que a determinação de um valor tão significativo como a capacidade máxima de punção da laje ainda seja claramente empírica e leve em conta apenas o tipo de armadura de punção. Assim, parâmetros relacionados ao detalhamento da armadura não são incluídos no cálculo. Além disso, alguns países modificam esse valor em seus anexos nacionais, resultando em diferenças significativas.

Em virtude disso, esforços científicos têm sido direcionados para desenvolver modelos analíticos que descrevem o comportamento de lajes lisas com armaduras de cisalhamento análogo ao funcionamento de uma treliça, a qual é composta por bielas representando as tensões de compressão, tirantes representando as tensões de tração e nós conectando as bielas e os tirantes. O mecanismo descrito anteriormente é chamado de Método de Bielas e Tirantes, que consiste na ideia de generalizar a analogia da treliça clássica para todas as regiões de qualquer estrutura, com base no Teorema do Limite Inferior da Plasticidade.

Os modelos de bielas e tirantes podem ser idealizados a partir do fluxo de tensões, usando o processo do caminho de carga, ver Figura 1.3, possibilitando ao projetista estrutural um entendimento melhor do funcionamento da estrutura, sendo apropriado para o dimensionamento de elementos com algum tipo de descontinuidade.

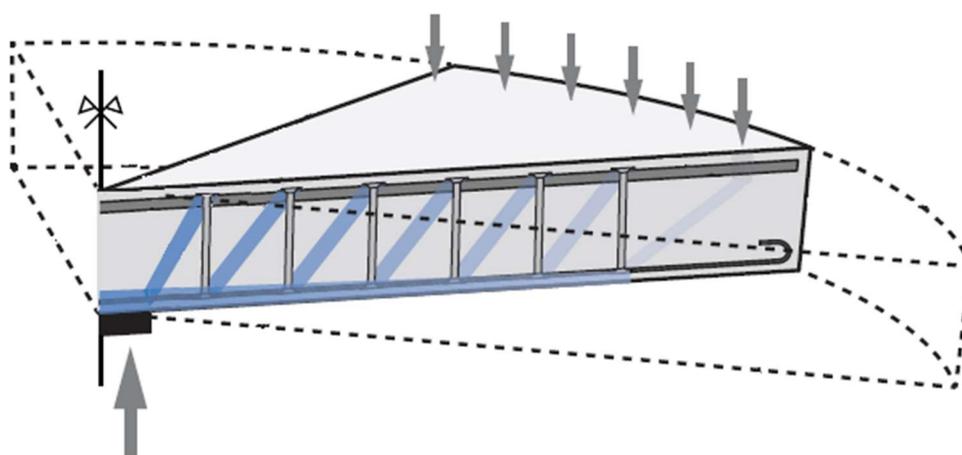


Figura 1.3 – Caminho de carga (Adaptado de BRANTSCHEN, 2016)

Diante do exposto, este trabalho apresenta uma revisão da literatura científica sobre modelos de bielas e tirantes existentes para punção em lajes. Além disso, propõe uma metodologia,

baseada no modelo de bielas e tirantes, para verificar a resistência ao esmagamento da biela de concreto em lajes lisas com armadura de cisalhamento tipo stud.

## **1.1. JUSTIFICATIVA**

Ainda hoje não há um método teórico abrangente que possa explicar completamente o fenômeno da punção, considerando todas as suas variáveis. Por essa razão, comumente, é necessário recorrer às recomendações normativas disponíveis para realizar o dimensionamento de lajes lisas. Os códigos atuais adotam uma abordagem empírica para calcular a resistência máxima à punção. Isso é feito multiplicando a resistência à punção de lajes sem armadura de cisalhamento por um fator específico, determinado conforme o tipo de armadura de cisalhamento, obtido por meio da comparação com resultados de ensaios. Normalmente, esse fator é considerado como constante. No entanto, utilizar uma formulação que considere apenas a influência do tipo de armadura de cisalhamento, através de um fator constante, pode levar a resultados inseguros.

A falta de métodos confiáveis para estimar a resistência ao cisalhamento de lajes lisas de concreto tem sido uma preocupação persistente tanto na comunidade científica nacional quanto internacional. As falhas frequentes na compreensão do fenômeno da punção e na previsão precisa do comportamento de ruptura das lajes representam desafios significativos no projeto de estruturas. Nesse contexto, esta pesquisa tem como objetivo auxiliar na investigação sobre a previsão de resistência à punção de lajes lisas com esmagamento da biela de concreto adjacente ao pilar. Com isso, espera-se que os resultados deste estudo representem uma contribuição ao entendimento e à abordagem desses aspectos fundamentais no campo da engenharia estrutural.

## **1.2. OBJETIVOS**

### **1.2.1. Objetivo Geral**

Esta pesquisa tem como objetivo propor uma metodologia de cálculo, baseada no modelo de bielas e tirantes, para estimar a resistência ao esmagamento da biela de concreto em lajes lisas com armadura de cisalhamento tipo stud, disposta simetricamente em arranjos radiais ao redor do pilar, sob carregamento simétrico.

### 1.2.2. Objetivos Específicos

- Apresentar uma revisão sobre modelos de bielas e tirantes disponíveis na literatura para lajes lisas de concreto armado;
- Validar o método proposto por meio da comparação com resultados de ensaios experimentais de punção em lajes lisas de concreto armado, disponíveis na literatura científica;
- Comparar os resultados obtidos pelo método proposto com as recomendações normativas do ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023), e *fib* Model Code 2020 (2023) e com os métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017).

## 1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO

O *Capítulo 1* apresenta a problemática tratada nessa dissertação, a justificativa e objetivos, geral e específicos.

O *Capítulo 2* apresenta uma breve revisão da literatura sobre os principais aspectos da punção em lajes lisas. Em seguida, são descritos os critérios normativos do ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023) e *fib* Model Code 2020 (2023) para o dimensionamento à punção de lajes lisas, com ênfase na resistência máxima do concreto. Posteriormente é mostrado um breve histórico dos modelos de bielas e tirantes aplicados a punção em lajes de concreto armado. E por fim, são apresentados os métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017) para verificar o comportamento à punção de lajes lisas com armadura de cisalhamento.

O *Capítulo 3* apresenta a metodologia proposta para estimar a resistência ao esmagamento da biela de concreto em lajes lisas com armadura de cisalhamento tipo stud, distribuída em arranjos radiais, submetidas à carregamento simétrico. Além disso, é apresentado o banco de dados a ser empregado na avaliação do método, bem como a metodologia de análise dos resultados.

O *Capítulo 4* mostra os resultados obtidos pelo método proposto, pelas normas ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023) e *fib* Model Code 2020 (2023) e pelos métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017). Além disso são

apresentadas análises estatísticas, análise da dispersão dos resultados e penalização segundo o “Demeter Points Classification” (DPC).

O *Capítulo 5* contém as conclusões dessa dissertação.

O *Apêndice A* apresenta o memorial de cálculo do método proposto para uma laje do banco dados.

O *Anexo A* mostra os cortes das lajes do banco de dados nos casos em que foram disponibilizados pelo autor.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste capítulo, inicialmente, é feita uma breve revisão da literatura sobre os principais aspectos da punção em lajes lisas, abrangendo os modos de ruptura que estão ligados ao fenômeno da punção e as armaduras de cisalhamento tipo stud. Em seguida, são descritos os critérios normativos para o dimensionamento à punção de lajes lisas de concreto armado submetidas à carregamento simétrico. As seguintes normas são abordadas: ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023), e *fib* Model Code 2020 (2023). Posteriormente é mostrado um breve histórico dos modelos de bielas e tirantes aplicados a punção em lajes de concreto armado. E por fim, são apresentadas algumas metodologias de cálculo para verificar o comportamento à punção de lajes lisas com armadura de cisalhamento.

### **2.1. PUNÇÃO EM LAJES LISAS**

#### **2.1.1. Aspectos gerais**

As lajes lisas são sistemas em que as lajes são apoiadas diretamente sobre os pilares, resultando em uma típica concentração de esforços cortantes e momentos negativos de alta intensidade na região da ligação laje-pilar. MELGES (1995) alerta que a predominância do esforço cortante pode fazer com que a laje falhe de modo frágil, antes de atingir sua capacidade resistente à flexão.

Lajes lisas estão sujeitas a diversos modos de ruptura. Dentre eles, tem-se a ruptura por punção (de lajes sem armadura de cisalhamento, com esmagamento da biela de concreto adjacente ao pilar, na região da armadura de cisalhamento ou fora da região armada) e a ruptura por flexão (com escoamento da armadura ou com esmagamento do concreto). A Figura 2.1 apresenta espécimes com os modos de rupturas citados.

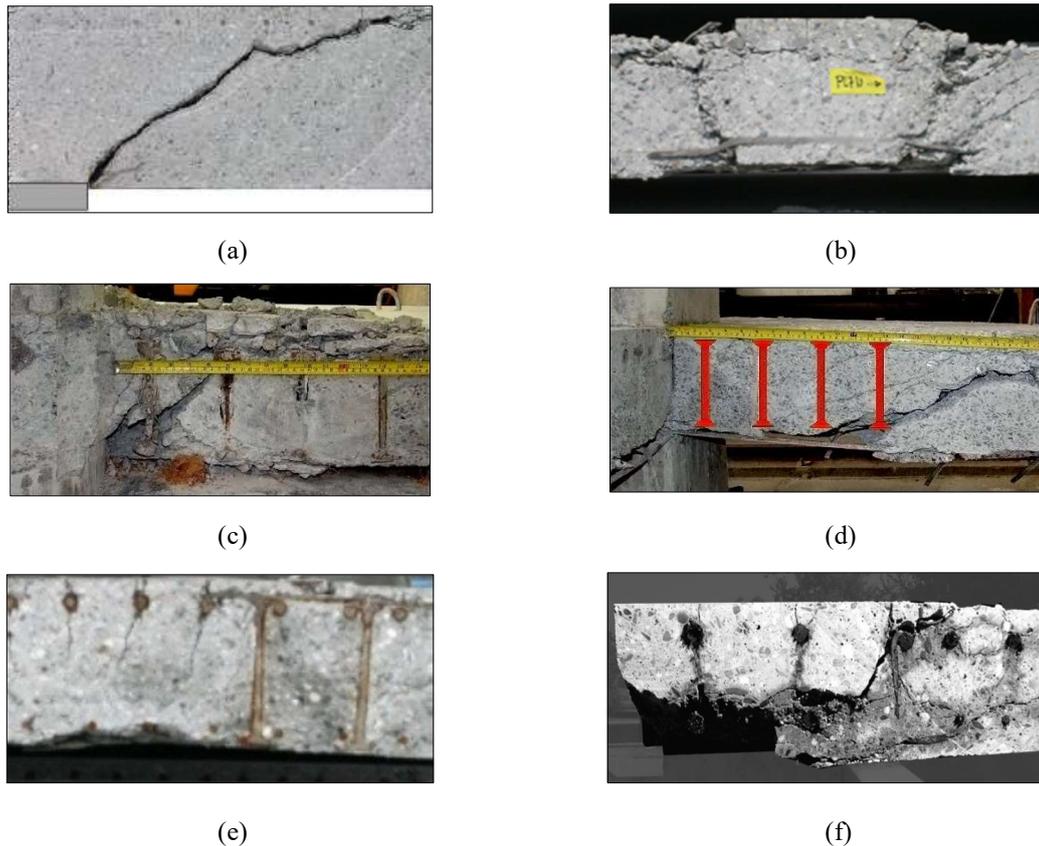


Figura 2.1 – Modos de ruptura de lajes lisas: (a) ruptura por punção de lajes sem armadura de cisalhamento (GUANDALINI, 2005); (b) ruptura por punção com esmagamento da biela (LIPS, 2012); (c) ruptura por punção na região da armadura de cisalhamento (FERREIRA, 2010); (d) ruptura por punção fora da região armada (Adaptado de FERREIRA, 2010); (e) ruptura por flexão com escoamento da armadura (Adaptado de LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012); (f) ruptura por flexão com esmagamento do concreto (HEGGER, HAUSLER e RICKER, 2007)

As rupturas por punção de lajes lisas sem armadura de cisalhamento, por esmagamento da biela de concreto e a ruptura fora da região armada devem ser evitadas, pois são de natureza frágil devido a estarem relacionadas exclusivamente à parcela resistente do concreto. No caso da ruptura na região das armaduras, a capacidade resistente da laje é determinada pela soma das contribuições do concreto e das forças nas unidades de armadura de cisalhamento, esse é o caso idealizado no dimensionamento à punção, uma vez que a ruptura ocorre de forma mais dúctil.

A ruptura por flexão com escoamento da armadura é caracterizada por ocorrer com grandes deformações pós pico, formando um patamar de resistência bem definido, ou seja, ocorre de forma dúctil. A ruptura por flexão com esmagamento do concreto acontece devido a uma alta

tensão de compressão na região nodal do pilar, resultando no esmagamento do concreto. Para uma classificação correta, o modo de ruptura por flexão pode ser identificado através de critérios de deformação no aço e no concreto, possibilitando distinguir a falha por flexão da punção e, ainda, o intermediário flexo-punção, com base no raio de plastificação das barras da armadura de flexão e deformações máximas no concreto.

A Figura 2.2, que ilustra a relação entre carga e deslocamento em lajes ensaiadas por MENETREY (1998), evidencia a diferença de ductilidade entre lajes que falharam por punção e por flexão. Nota-se que as lajes que romperam por punção apresentam uma queda abrupta da força mobilizada no momento da ruptura, diferentemente das lajes que falharam por flexão.

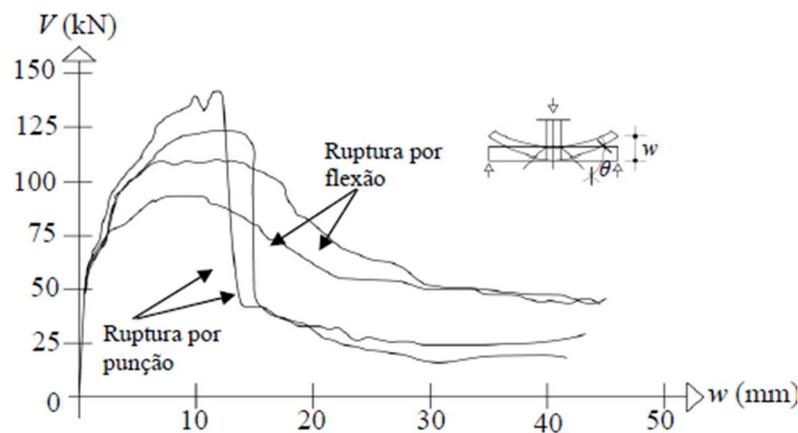


Figura 2.2 – Carga *versus* deslocamento em lajes (MENETREY, apud SIQUEIRA, 2021)

Conforme a distribuição dos esforços, que são influenciados pelo tipo de carregamento, a geometria do pavimento, as condições de contorno e a distribuição das armaduras de flexão, a punção pode ser classificada em:

- Simétrica: situação em que a distribuição dos esforços é simétrica em relação aos eixos de simetria da ligação laje-pilar;
- Assimétrica sem excentricidade: situação em que se tem uma assimetria na distribuição dos esforços, mas não há transferência de momento.
- Assimétrica com excentricidade: situação em que se tem uma assimetria na distribuição dos esforços e há transferência de momento fletor devido à existência de excentricidade na ligação.

Neste trabalho, a análise é restrita a punção simétrica. A Figura 2.3 ilustra um trecho de ligação laje-pilar interno, em que se observa a distribuição dos esforços cortantes e momentos fletores;

é importante ressaltar que os estudos sobre o comportamento de lajes à punção disponíveis na literatura limitam-se à extensão da região de momento negativo, que pode ser estimada em  $0,44 \cdot L$ .

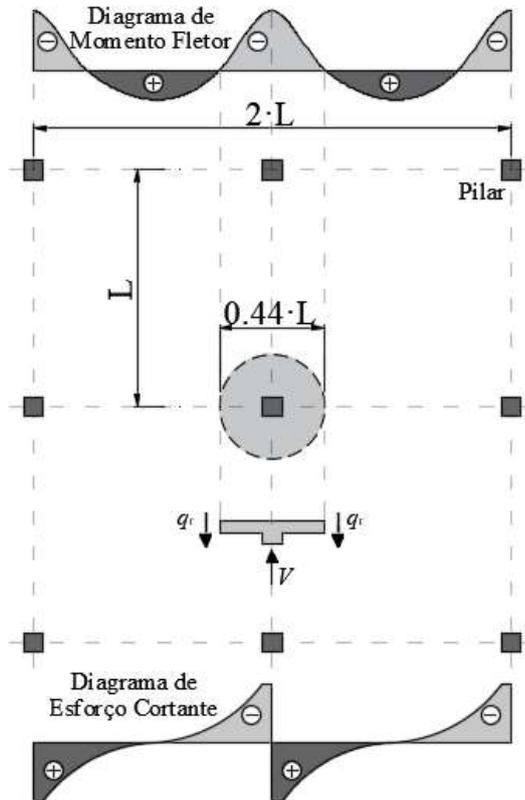


Figura 2.3 – Diagrama de esforço cortante e momento fletor radial na ligação laje-pilar (PEREIRA FILHO, 2021)

No dimensionamento de lajes lisas, busca-se evitar a ruptura frágil, o que pode ser feito por meio de várias alternativas. Entre elas, estão o aumento da seção transversal do pilar ou da espessura da laje, o uso de capitéis, o aumento da taxa de armadura de flexão ou da resistência do concreto e a utilização de armaduras de cisalhamento. No entanto, aumentar a seção do pilar e utilizar ábacos e capitéis geralmente são consideradas soluções inadequadas devido às incompatibilidades arquitetônicas. Aumentar a espessura da laje eleva o peso próprio da estrutura, o que aumenta as cargas nas fundações. Elevar a resistência do concreto e a taxa de armadura de flexão são opções pouco eficientes, e em alguns casos, não é prático. Portanto, a solução técnico-econômica mais eficiente é a utilização de armaduras de cisalhamento.

O uso da armadura de cisalhamento pode aumentar a resistência à punção e proporcionar maior ductilidade na ligação laje-pilar. Contudo, MELGES (1995), REGAN e SAMADIAN (2001) e

PEREIRA FILHO (2021) relatam que a ancoragem das armaduras de cisalhamento é um ponto crítico em elementos esbeltos, como lajes, devido ao pequeno embutimento disponível.

MOKHTAR, GHALI e DILGER (1985) e FERREIRA (2010) abordam que armadura de cisalhamento em forma de estribos ou barras dobradas em lajes esbeltas (150 a 250 mm de espessura total) podem ser de difícil de instalação ou não ter ancoragem suficiente na parte superior e inferior da armadura de cisalhamento para atingir deformações próximas ao escoamento. Com isso, para lajes esbeltas, os autores recomendam o uso de armadura de cisalhamento tipo stud, proposta por ANDRA, DILGER e GHALI (1979), uma vez que possuem ancoragens no topo e na base suficientes para desenvolver o escoamento antes da ruptura.

Diversos trabalhos acerca de lajes com armaduras de cisalhamento, como o de BRANTSCHEN (2016), abordam sobre o padrão de fissuração na ligação laje-pilar durante o carregamento progressivo de um espécime de laje concêntrica e isolado, ver Figura 2.4.

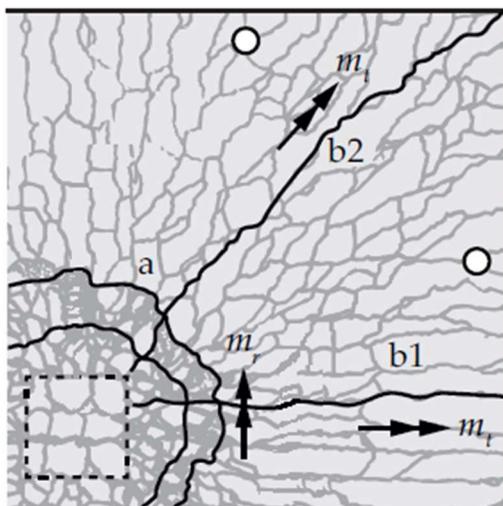


Figura 2.4 – Fissuras radiais e tangenciais (Adaptado de BRANTSCHEN, 2016)

BRANTSCHEN (2016) afirma que as fissuras nas lajes se desenvolvem inicialmente na parte tracionada para baixos níveis de carga, associadas a momentos de flexão tangenciais  $m_t$ , geralmente nas direções principais (fissura b1) antes das diagonais (fissura b2). Além disso, aborda que o uso de armadura transversal pode criar planos mais fracos, aumentando o risco de fissuras. O autor ainda destaca que o aumento da carga leva à formação de fissuras ao redor da coluna devido a momentos de flexão radiais  $m_r$  (fissuras a). Por fim, o escoamento da armadura de flexão provoca grandes aberturas nas fissuras existentes e o surgimento de novas fissuras

tangenciais mais afastadas. As últimas fissuras podem ter abertura de até 3 mm antes da falha e afetar a ancoragem superior das armaduras de cisalhamento.

### 2.1.2. Armaduras de cisalhamento tipo stud

As armaduras de cisalhamento tipo stud, também conhecidas como conectores de aço, são amplamente utilizadas devido à sua fabricação industrializada, eliminando a necessidade de confecção no canteiro de obras e pelo excelente desempenho no combate à punção. Nessa categoria de armadura, destacam-se os *studs rails* (Figura 2.5a), que consistem em barras soldadas em trilhos de aço na extremidade inferior e com cabeça de ancoragem na extremidade superior, sendo colocadas antes da montagem das armaduras de flexão, garantindo o correto espaçamento entre as diferentes camadas de armadura. Além disso, têm-se os *double headed studs* (Figura 2.5b), que são preferidos por sua montagem mais simples em comparação aos *studs rails*, pois podem ser instalados após a montagem das armaduras de flexão.

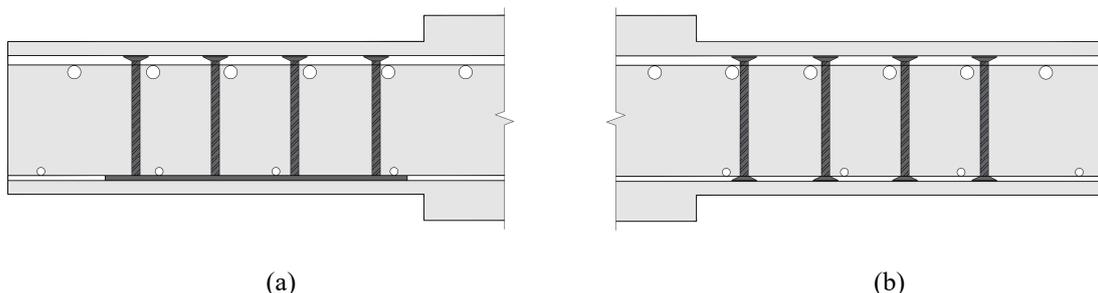
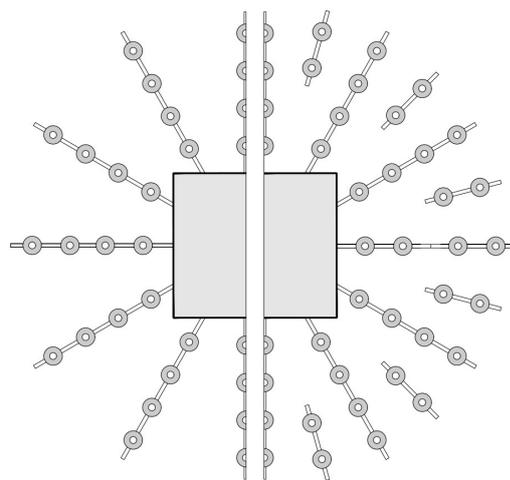
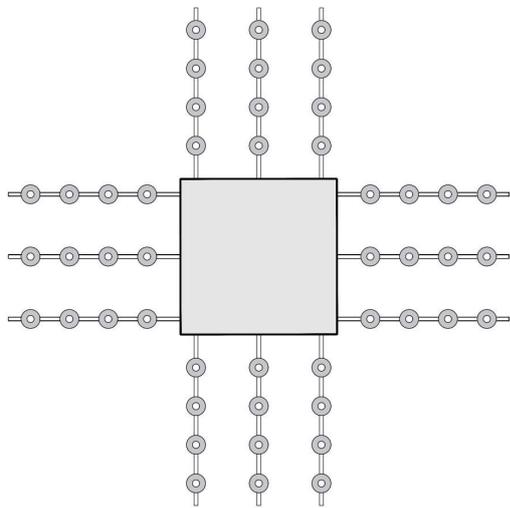


Figura 2.5 – Modelos de armadura de cisalhamento do tipo conector: (a) *single-headed studs on rails* (tradução livre: conectores de uma cabeça); (b) *double headed stud* (tradução livre: conectores de duas cabeças)

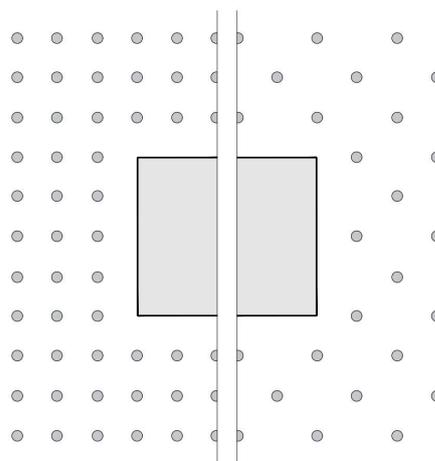
Essas armaduras podem ser distribuídas em diversos tipos de arranjos, sendo os mais comuns: radial, cruciforme e em grade, conforme ilustrado na Figura 2.6. O arranjo radial (Figura 2.6a) é considerado ideal devido à distribuição uniforme das armaduras ao longo da superfície de ruptura, no entanto, pode causar problemas de compatibilização com as armaduras de flexão. O arranjo cruciforme (Figura 2.6b) é o mais simples levando em consideração o aspecto construtivo, pois reduz os problemas de interferência entre as armaduras, embora favoreça a ruptura fora da região das armaduras. O arranjo em grade (Figura 2.6c) também é simples de executar e apresenta baixa interferência entre as armaduras, mas requer maior quantidade de armadura de cisalhamento e dificulta a contabilização precisa do número de pernas que efetivamente contribuem para a resistência à punção.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.6 – Tipos de arranjos de conectores de aço em ligações laje-pilar: (a) arranjo radial; (b) arranjo cruciforme; (c) arranjo em grade (Adaptado de NASCIMENTO, 2020)

Normalmente, os conectores de aço possuem cabeças de diâmetro igual ou superior a 3 vezes o diâmetro do corpo do conector e espessura de  $2/3$  desse diâmetro. Além disso, os trilhos (*rails*) têm base e altura iguais ou superiores a 2,5 e 0,5 vezes o diâmetro do corpo do conector, respectivamente. Essas dimensões são adotadas para garantir a eficiência da ancoragem dessas armaduras. Também é importante destacar que a ancoragem deve estar na altura das barras de flexão ou além do nível das barras de flexão para ser eficiente.

### 2.1.3. Esmagamento da biela de concreto adjacente ao pilar

O limite máximo de resistência de uma ligação laje-pilar está comumente associado ao esmagamento da biela de concreto. Esse tipo de falha ocorre quando a superfície de ruptura se situa na zona entre a face do pilar e a primeira camada de armadura de cisalhamento, conforme mostra a Figura 2.7. Tal modo de ruptura é indesejável, pois o concreto rompe de forma tão abrupta quanto a falha por punção sem armadura de cisalhamento ou a falha por punção com superfície de ruína fora da região das armaduras, devido estarem relacionados à mobilização dos mecanismos resistentes do concreto.

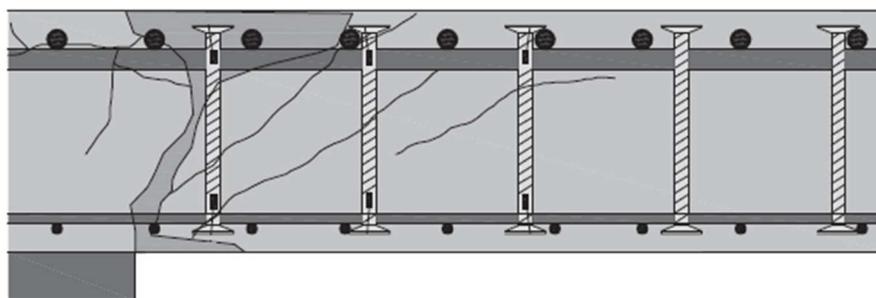


Figura 2.7 – Ruptura por punção com o esmagamento da biela de concreto

(Adaptado de LIPS, 2012)

Conforme MUTTONI e RUIZ (2010), a eficiência da biela de concreto adjacente ao pilar é influenciada pelo estado de deformações transversais na biela de compressão e pela resistência à compressão do concreto. Na Figura 2.8a, é possível notar que as bielas estão posicionadas em uma área em que vários tipos fissuras estão presentes, as quais provocam redução da sua eficiência. As fissuras de flexão são afetadas pela taxa de armadura de flexão e pelo índice de esbeltez da laje. As fissuras de cisalhamento têm sua abertura influenciada pelo escorregamento da ancoragem das armaduras de cisalhamento e as fissuras de delaminação são controladas pelo

mecanismo de ancoragem das armaduras. Com isso, o tipo de armadura de cisalhamento usado também tem efeito na resistência ao esmagamento da biela de concreto, como observado na Figura 2.8b com lajes com geometria, condições de contorno, características dos materiais, taxas de armadura de cisalhamento e taxa de armadura de flexão semelhantes.

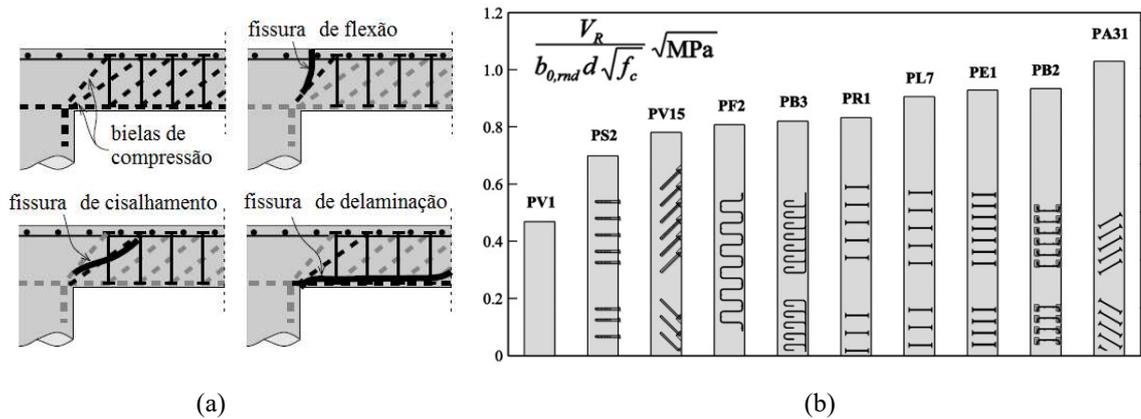


Figura 2.8 – Parâmetros que influenciam na resistência ao esmagamento da biela: a) fissuras adjacentes ao pilar (MUTTONI e RUIZ, 2010); b) influência do tipo de armadura na resistência ao esmagamento da biela adjacente ao pilar (adaptado de EINPAUL *et al.*, 2016)

FRAILE *et al.* (2021) abordam que outros parâmetros também devem ser cuidadosamente analisados na resistência máxima à punção de lajes armadas ao cisalhamento, como a posição do primeiro perímetro de armadura de cisalhamento, a dimensão do pilar, a armadura de flexão e a geometria da laje.

Conforme EINPAUL *et al.* (2016), a intensidade da força na biela aumenta à medida que sua inclinação diminui. Essa inclinação é influenciada pela posição e pelas condições de ancoragem da primeira camada de armadura de cisalhamento. Com isso, os ângulos diminuem para distâncias maiores da primeira armadura transversal até a face do pilar ou em situações de ancoragem precárias. BRANTSCHEN (2016) aborda que, se a inclinação da biela for baixa, a resistência pode ser reduzida por fissuras de flexão propagando-se na biela, e se a inclinação for muito acentuada, a resistência também pode ser reduzida por fissuras devido à tensão na armadura transversal. Assim, existe uma posição ótima para a primeira camada de armadura de cisalhamento, onde a relação entre a resistência e a força na biela é a mais alta. O *fib Model Code 2020* (2023) aborda que esta distância varia entre  $0,35 \cdot d$  e  $0,75 \cdot d$ , ver Figura 2.9.

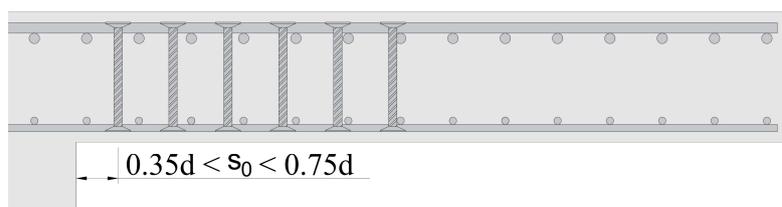


Figura 2.9 – Distância mínima e máxima, conforme o *fib Model Code 2020 (2023)*, para a posição da primeira camada de armadura de cisalhamento

FRAILE *et al.* (2021) destacam que negligenciar a relação entre a dimensão do pilar e a altura útil da laje, no cálculo da resistência à punção de uma laje poderia resultar em estimativas de resposta muito inseguras. Além disso, os autores mencionam que os parâmetros que afetam a resistência à flexão (tensão de escoamento e taxa de armadura) e, conseqüentemente, o nível de deformação em uma laje, também exercem uma influência significativa na resistência máxima à punção.

Segundo MUTTONI e BUJNAK (2012), a esbelteza da laje influencia tanto na rigidez da laje quanto na carga de esmagamento da biela de concreto. Lajes mais esbeltas comportam-se de forma semelhante a lajes com baixa taxa de armadura de flexão, apresentando grande rotação e maior abertura de fissuras de cisalhamento. A maioria das recomendações normativas não considera essa influência na resistência, com ressalvas para o *fib Model Code*, que correlaciona a resistência à punção com a rigidez a flexão da laje.

LIPS (2012) afirma que a taxa de armadura de cisalhamento afeta a resistência e a capacidade de rotação. Na Figura 2.10 observa-se que mesmo uma pequena taxa de armadura de cisalhamento aumenta a resistência e a capacidade de rotação (PL11) e, duplicando essa taxa, esses parâmetros aumentam ainda mais (PL12). No entanto, se for adicionada ainda mais armadura de cisalhamento, a resistência à punção não aumenta significativamente (PL7). Isso pode ser explicado pela mudança no modo de falha, ver Figura 2.11, uma vez que um aumento adicional na taxa de armadura de cisalhamento também levaria ao esmagamento da biela de concreto.

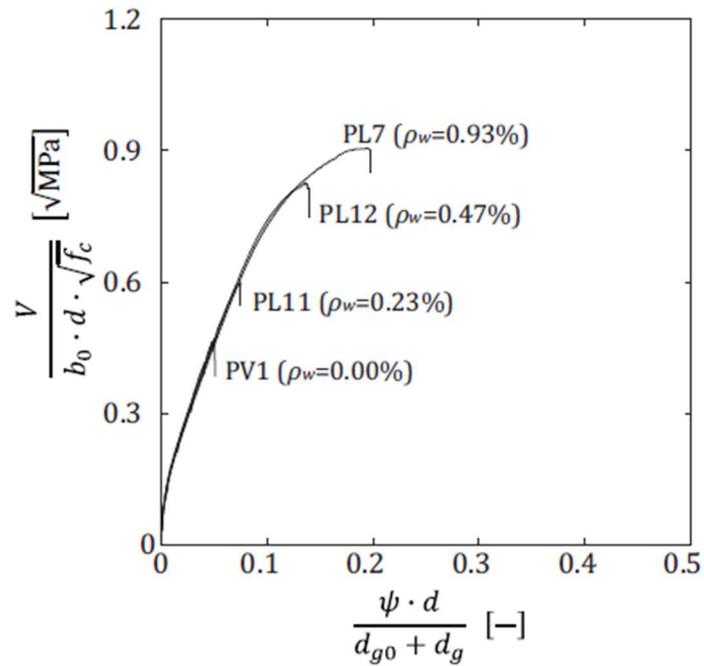


Figura 2.10 – Curva carga-rotação para lajes com várias taxas de armadura de cisalhamento (LIPS, 2012)

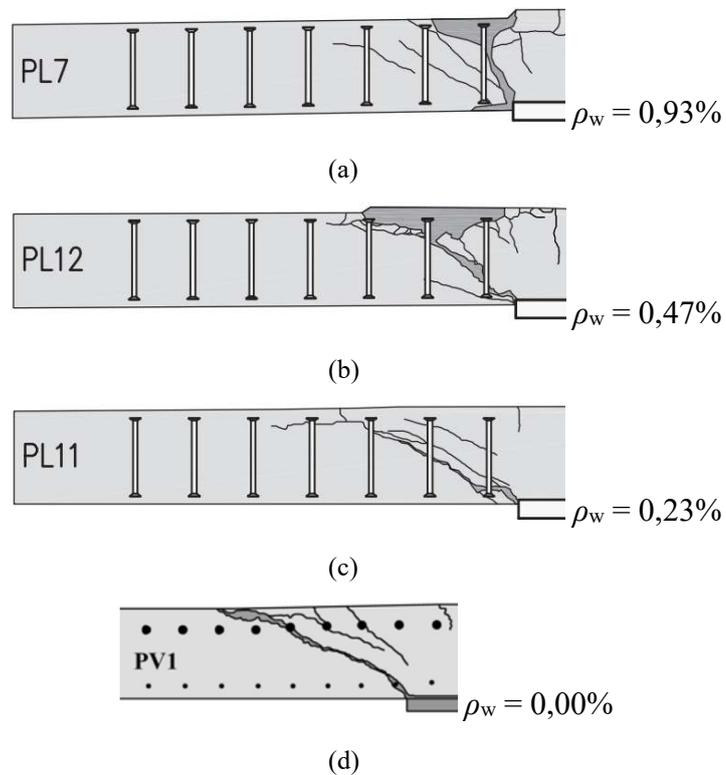


Figura 2.11 – Influência da taxa de armadura de cisalhamento na inclinação da superfície de ruptura (RUIZ e MUTTONI, 2010 e LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012)

O modo de falha pode, portanto, mudar de um comportamento dúctil para um mais frágil, associado ao esmagamento da biela de concreto, com uma fase de transição não bem definida. Dessa forma, observa-se que a contribuição de um determinado tipo de sistema não é diretamente proporcional à sua taxa. Segundo BRANTSCHEN (2016), a ruptura pelo esmagamento da biela parece estar relacionada ao desenvolvimento de algumas limitações na ancoragem dos sistemas de armadura de cisalhamento sob certas condições específicas, como fissuras. Isso pode resultar em falhas prematuras, com uma redução da contribuição efetiva da armadura de cisalhamento (escoamento não alcançado) no fenômeno da punção. Nos ensaios experimentais de LIPS (2012), foi observado que algumas lajes com armadura de cisalhamento tipo stud apresentaram ruptura pelo esmagamento do concreto na superfície superior, próximo à ancoragem da primeira camada de conectores.

## **2.2. RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS PARA ESTIMATIVA DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO**

As recomendações normativas do ACI 318 (2019), ABNT NBR 6118 (2023), Eurocode 2 (2023) e do *fib* Model Code 2020 (2023) consideram que a resistência à punção de lajes lisas sem armaduras de cisalhamento ( $V_{RC}$ ) pode ser calculada a partir de uma tensão resistente ( $\tau_R$ ) atuando em uma área de controle ( $u_1 \cdot d$ ). Para lajes com armadura de cisalhamento, as normas recomendam a verificação de três possíveis modos de ruptura: dentro da região das armaduras de cisalhamento, fora da região das armaduras de cisalhamento e a resistência máxima à punção ( $V_{R,máx}$ ). Este último modo será discutido mais detalhadamente neste trabalho.

### **2.2.1. ACI 318 (2019)**

O ACI 318 (2019) determina a resistência à punção de uma laje lisa de concreto armado sem armadura de cisalhamento por meio de uma tensão cisalhante atuando em um perímetro de controle afastado do pilar à uma distância igual a  $d/2$  (Figura 2.12), assumindo uma fissura de punção com um plano de ruptura à 45°.

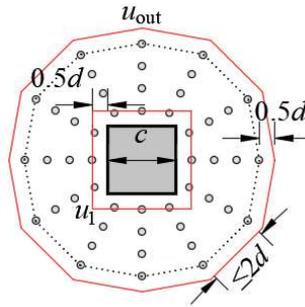


Figura 2.12 – Perímetro de controle (Adaptado do ACI 318, 2019)

Esta norma prescreve que a resistência à punção de uma laje lisa sem armadura de cisalhamento deve ser determinada pela Equação 2.1, sendo definida pelo menor valor entre as três expressões mostradas.

$$V_{Rc,ACI} = \min \begin{cases} 0,33 \cdot k \cdot \sqrt{f'_c} \cdot u_1 \cdot d \\ 0,17 \cdot k \cdot \left(1 + 2/\left[\frac{a}{b}\right]\right) \cdot \sqrt{f'_c} \cdot u_1 \cdot d \\ 0,083 \cdot k \cdot (40 \cdot d/u_1 + 2) \cdot \sqrt{f'_c} \cdot u_1 \cdot d \end{cases} \quad \text{Equação 2.1}$$

Em que:

$k$  é um parâmetro que considera o efeito de escala, dado por:  $k = \sqrt{2/(1 + 0,004 \cdot d)} \leq 1,0$ , com  $d$  em mm;

$f'_c$  é a resistência à compressão do concreto;

$u_1$  é o perímetro de controle junto à face do pilar em mm;

$d$  é a altura útil da laje em mm;

$a$  é a maior dimensão do pilar;

$b$  é a menor dimensão do pilar.

Para o caso de laje com armadura de cisalhamento, esta norma recomenda que deve ser feita a verificação da ruptura pelo esmagamento do concreto através da Equação 2.2.

$$V_{Rmáx,ACI} = \begin{cases} 0,50 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot u_1 \cdot d \rightarrow \text{estribos} \\ 0,66 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot u_1 \cdot d \rightarrow \text{studs} \end{cases} \quad \text{Equação 2.2}$$

### 2.2.2. FprEN 1992-1-1 (2023)

O FprEN 1992-1-1 (2023) é o rascunho final da nova geração do Eurocode 2, que substituirá o EN 1992-1-1 (2004) e suas retificações, EN 1992-1-1/AC (2010) e EN 1992-1-1:2004/A1 (2014). O Eurocode 2 (2023) apresenta previsões para a resistência de uma ligação laje-pilar baseada em simplificações das equações do fib Model Code 2010 (2013). As alterações principais visaram simplificar a interação carga-rotação com o critério de ruína. As duas normas consideram um perímetro de controle afastado do pilar à uma distância igual a  $d/2$  (Figura 2.13). Além disso, o fator que considera o desempenho da armadura de cisalhamento ( $\eta_{sys}$ ) não é mais constante, uma vez que varia de acordo com o tipo de armadura de cisalhamento, o perímetro do pilar e a altura útil da laje.

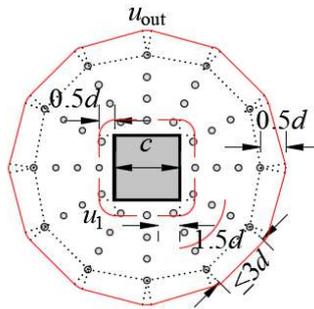


Figura 2.13 – Perímetro de controle (Adaptado do Eurocode 2, 2023)

O novo Eurocode 2 (2023) recomenda que a resistência à punção de uma laje lisa sem armadura de cisalhamento deve ser determinada pela Equação 2.3.

$$V_{Rc,EC2} = 0,6 \cdot k_{pb} \left( 100\rho \cdot f_{ck} \cdot \frac{d_{dg}}{d} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot b_{0,5} \cdot d \leq 0,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_{0,5} \cdot d \quad \text{Equação 2.3}$$

Em que:

$k_{pb}$  é um coeficiente para controlar o incremento de resistência e pode ser calculado por

$$1 \leq k_{pb} = 3,6 \sqrt{1 - \frac{b_0}{b_{0,5}}} \leq 2,5 ;$$

$\rho$  é a média geométrica da taxa de armadura de flexão nas duas direções calculada por  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$ , onde  $\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas de armadura de flexão da laje nas direções x e y, levando em consideração apenas uma faixa de laje igual à dimensão do pilar naquela direção acrescida de  $3 \cdot d$  para cada lado;

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão do concreto;

$d_{dg}$  é um parâmetro para considerar as propriedades do agregado, calculado através de

$d_{dg} = 16 + d_g \leq 40$  mm para  $f_{ck}$  de até 60 MPa;

$d_g$  é o diâmetro máximo do agregado graúdo;

$d$  é a altura útil da laje;

$b_0$  é o perímetro do pilar;

$b_{0,5}$  é o perímetro de controle à punção.

Para a estimativa de resistência à punção com armadura de cisalhamento, esta norma prescreve que deve ser feita a verificação da ruptura pelo esmagamento do concreto através da Equação 2.4.

$$V_{Rmáx,EC2} = \eta_{sys} \cdot V_{Rc,EC2} \quad \text{Equação 2.4}$$

Em que:

$\eta_{sys}$  é um fator que considera o desempenho da armadura de cisalhamento, sendo

$$\eta_{sys} = \begin{cases} 0,70 + 0,63 \left(\frac{b_0}{d}\right)^{1/4} \geq 1,0 & \text{para conectores de aço} \\ 0,50 + 0,63 \left(\frac{b_0}{d}\right)^{1/4} \geq 1,0 & \text{para estribos} \end{cases}$$

### 2.2.3. ABNT NBR 6118 (2023)

A ABNT NBR 6118 (2023) fundamenta seus modelos de cálculos, tal como o Eurocode 2 (2014), nas recomendações do documento CEB-FIP MC90 (1993), o que justifica a semelhança entre os métodos. Para o dimensionamento, a norma brasileira recomenda que a verificação da resistência à punção de laje lisas sem armadura de cisalhamento deve ser feita levando em consideração um perímetro de controle afastado a  $2 \cdot d$  da face do pilar, tal como ilustra a Figura 2.14.

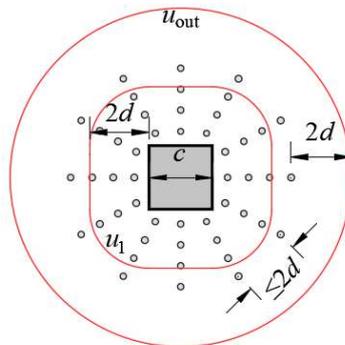


Figura 2.14 – Perímetro de controle (Adaptado da ABNT NBR 6118, 2023)

Esta norma prescreve que a resistência à punção de uma laje lisa sem armadura de cisalhamento deve ser determinada pela Equação 2.5.

$$V_{Rc,NBR} = 0,13 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad \text{Equação 2.5}$$

Em que:

$k$  é um parâmetro que considera o efeito de escala, obtido por:  $k = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2,0$ , com  $d$  em mm;

$\rho$  é a média geométrica da taxa de armadura de flexão nas duas direções calculada por  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$ , onde  $\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas de armadura de flexão da laje nas direções x e y, levando em consideração apenas uma faixa de laje igual à dimensão do pilar naquela direção acrescida de  $3 \cdot d$  para cada lado;

$u_1$  é o perímetro de controle afastado a  $2 \cdot d$  da face do pilar.

Para o caso de laje com armadura de cisalhamento, esta norma prescreve que deve ser feita a verificação da ruptura pelo esmagamento do concreto através da Equação 2.6. Conforme a norma, o valor de  $V_{Rmax}$  ainda pode ser ampliado em 20% por efeito de estado múltiplo de tensões junto a um pilar interno.

$$V_{Rmax,NBR} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot u_0 \cdot d \quad \text{Equação 2.6}$$

Sendo:

$f_{cd}$  a resistência de cálculo à compressão do concreto;

$u_0$  o perímetro do pilar;

$\alpha_v = (1 - f_{ck}/250)$ .

#### 2.2.4. *fib* Model Code 2020 (2023)

O *fib* Model Code 2020 (2023) apresenta suas equações para prever a resistência à punção com base na teoria da fissura crítica apresentada por MUTTONI e SCHWARTZ (1991), MUTTONI (2008) e RUIZ e MUTTONI (2009), em que os autores propõem que a resistência à punção seja obtida em função da rotação da laje ( $\psi$ ), que é dada em função da carga aplicada e da resistência

à flexão da laje. Em virtude disso, para estimar a resistência da laje é necessário realizar um processo iterativo até que a condição de carga solicitante seja igual à resistente.

Esta norma prescreve que a resistência à punção de uma laje lisa sem armadura de cisalhamento deve ser determinada pela Equação 2.7.

$$V_{RC,MC10} = k_{\psi} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot u_1 \cdot d \quad \text{Equação 2.7}$$

Na expressão acima, o perímetro de controle ( $u_1$ ) pode ser obtido tal como ilustra a Figura 2.15 e  $k_{\psi}$  é um parâmetro que depende da rotação da laje, sendo definido pela Equação 2.8.

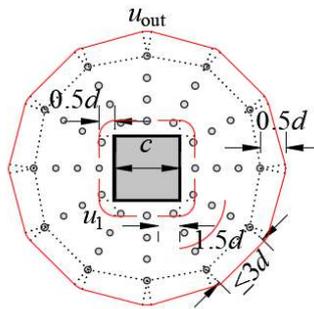


Figura 2.15 – Perímetro de controle (Adaptado do *fib* Model Code 2020, 2023)

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5+0,9 \cdot k_{dg} \cdot \psi \cdot d} \leq 0,6 \quad \text{Equação 2.8}$$

Sendo  $k_{dg}$  o fator que leva em consideração a rugosidade da superfície de fissura, obtido por  $k_{dg} = 32 / (16 + dg) \geq 0,75$ , em que  $dg$  é o diâmetro máximo do agregado em mm.

Diferentemente de outras recomendações normativas, o *fib* Model Code 2020 (2023) apresenta diversos níveis de aproximação para estimar a rotação da laje, sendo o nível III de aproximação o mais indicado para as verificações especiais em estruturas existentes, reduzindo a constante para prever a rotação com maior precisão, a qual pode ser estimada pela Equação 2.9.

$$\psi_{III} = 1,2 \cdot \frac{r_q}{d} \cdot \frac{f_{yw}}{E_{sw}} \cdot \left(\frac{m_S}{m_R}\right)^{3/2} \quad \text{Equação 2.9}$$

Em que:

$r_q$  é o raio de carregamento das lajes;

$m_S$  é o momento solicitante da laje, dado pelo *fib* Model Code 2020 (2023) como  $m_S = V/8$  para pilares internos;

$m_R$  é o momento resistente da laje, obtido através de  $m_R = \rho \cdot f_{ys} \cdot d^2 \cdot (1 - 0,5 \cdot \rho \cdot f_{ys}/f_{ck})$ .

Para o caso de laje com armadura de cisalhamento, esta norma prescreve que deve ser feita a verificação da ruptura pelo esmagamento do concreto através da Equação 2.10, em que a resistência é dada pela multiplicação do  $V_{RC}$  por um fator que considera o desempenho da armadura de cisalhamento utilizada ( $k_{sys}$ ), com valor igual a 2,8 para studs e 2,4 para estribos devidamente ancorados e 2,0 para armaduras em que não se conhece o rendimento.

$$V_{Rmáx,MC10} = k_{sys} \cdot k_{\psi} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot u_1 \cdot d \leq \sqrt{f_{ck}} \cdot u_1 \cdot d \quad \text{Equação 2.10}$$

### **2.3. HISTÓRICO DOS MODELOS DE BIELAS E TIRANTES PARA PUNÇÃO EM LAJES LISAS**

A seguir, é mostrado um breve resumo sobre o histórico dos modelos de bielas e tirantes utilizados para punção em lajes lisas, com o objetivo de oferecer uma visão abrangente da evolução das estruturas de treliça aplicadas a esse contexto específico. Importante ressaltar que não será conduzida uma análise detalhada dos modelos.

#### **2.3.1. ANDRA, BAUR e STIGLAT (1984)**

ANDRA, BAUR e STIGLAT (1984) apresentaram um modelo teórico para punção de uma laje circular com armadura de flexão em forma de anel e sem armadura de cisalhamento. Analogamente feito por KINNUNEN e NYLANDER (1960), o modelo considera a rotação de segmentos rígidos em torno de um centro de rotação (CR) localizado na face do pilar e na altura do eixo neutro, conforme mostra a Figura 2.16.

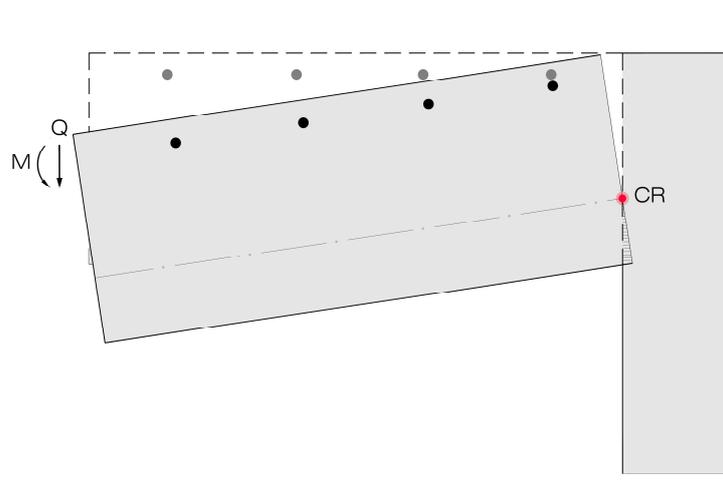


Figura 2.16 – Rotação de segmento rígido em torno de um ponto CR (Adaptado de ANDRA, BAUR e STIGLAT, 1984)

Cada segmento rígido é analisado usando um modelo de treliça (Figura 2.17), formado por um sistema básico com elementos de tração (representado por tirantes de concreto) e compressão (representado por bielas) em ângulos de  $45^\circ$ . Sobrepostas a este sistema existem bielas adicionais que irradiam da face do pilar abaixo da fissura, conectando o nó U0 à parte superior nos nós 01 a 05 (Figura 2.17a).

A formação de fissuras na borda do pilar interrompe os tirantes e as bielas do sistema básico, impossibilitando a ligação U2 – 00, como mostra a Figura 2.17b. Para manter o equilíbrio no nó U2, um tirante íngreme U2 – 01 é formado. Quando as tensões de tração aplicadas no nó 01 excedem a resistência à tração do concreto ocorre outra fissura e o nó 01 também falha (Figura 2.17c). A ruptura dos nós 01, 02 etc. pode ser compensada, dentro de certos limites, pela formação de outras bielas de compressão que vão se tornando cada vez mais planas, conforme mostra a Figura 2.17d.

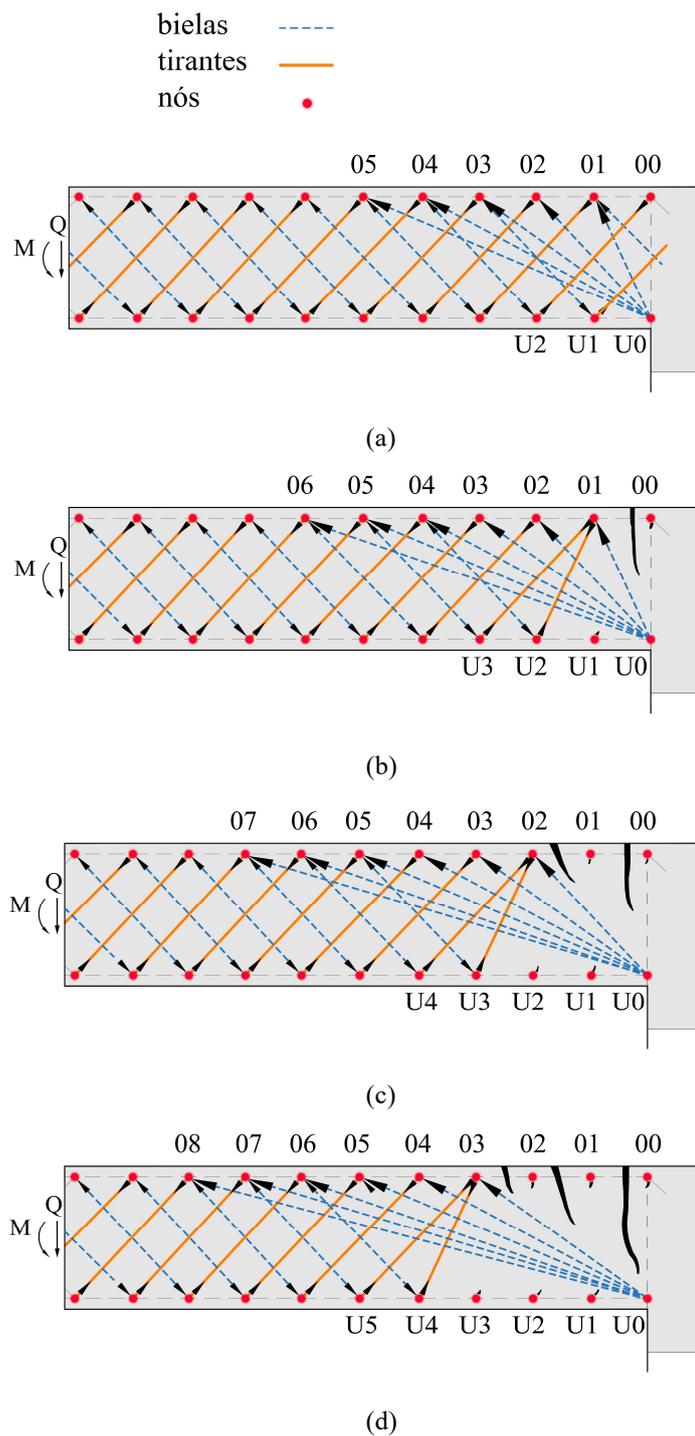


Figura 2.17 – Seções radiais de uma laje com modelo treliçado: (a) modelo de treliça; (b) formação de fissura na borda do pilar, ocasionando rompimento da ligação U2-00, surgimento de tirante íngreme U2-01 e da biela U0-06; (c) surgimento de outra fissura, ocasionando rompimento da ligação U2-01 e U3-01, surgimento de tirante íngreme U3-02 e da biela U0-07; (d) surgimento de outra fissura, ocasionando rompimento da ligação U3-02 e U4-02, surgimento de tirante íngreme U4-03 e da biela U0-08 (Adaptado de ANDRA, BAUR e STIGLAT, 1984)

ANDRA, BAUR e STIGLAT (1984) também desenvolveram um modelo bielas e tirantes para lajes de concreto com armadura de cisalhamento. Diferente do modelo anterior, os campos de tensões de tração agora são representados por tirantes de aço, os campos de compressão, pelas bielas. Com isso é assegurado o equilíbrio nodal na zona de compressão do concreto. Entretanto, se esta zona nodal falhar, forma-se uma fissura íngreme, acarretando deslocamento e rotação da laje ao longo do pilar, conforme ilustrado na Figura 2.18.

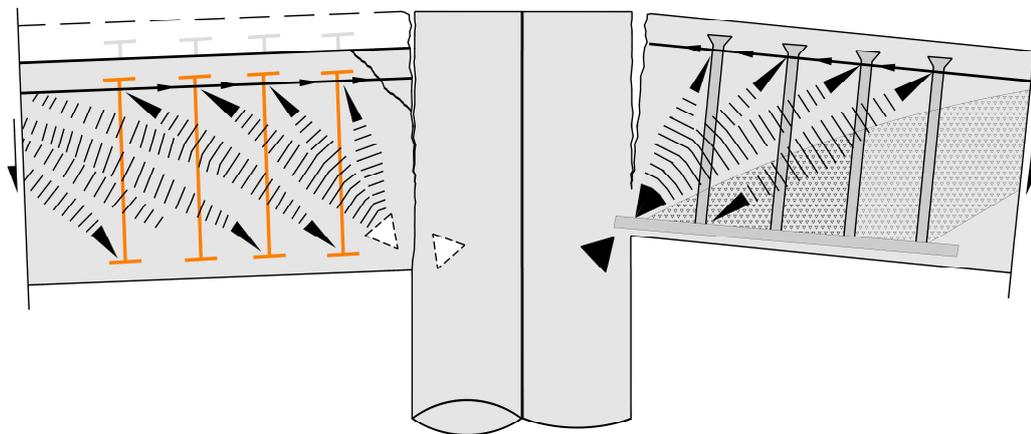


Figura 2.18 – Deslocamento e rotação da laje ao longo do pilar (Adaptado de ANDRA, BAUR e STIGLAT, 1984)

Os autores assumem que podem ocorrer os seguintes modos de ruptura:

- Ruptura dos tirantes de concreto: ocorre no modelo sem armadura de punção. À medida que os tirantes de concreto se rompem, as bielas em leque vão ficando cada vez mais planas e diminuindo o seu tamanho devido as condições geométricas da laje;
- Ruptura da zona nodal abaixo da fissura: ocorre na zona de compressão do concreto como resultado da combinação de tensões de flexão e cisalhamento;
- Ruptura das bielas: ocorre quando as tensões normais das bielas excedem a resistência a compressão do concreto.

### 2.3.2. REGAN (1994)

REGAN (1994) fala que as ações em uma laje sem ou com armadura de cisalhamento podem ser modeladas conforme mostram as Figuras 2.19a e 2.19b, respectivamente. No caso de laje sem armadura de cisalhamento, o autor considera que, no instante da ruptura, a força transversal

é suportada apenas por uma biela radial inclinada abaixo da fissura de cisalhamento. Já para modelos de laje com baixas taxas de armadura de cisalhamento, parte da biela radial inclinada se direciona para as extremidades superior da armadura de cisalhamento, assim a força transversal é resistida pelas parcelas do aço e da biela de concreto. Segundo o autor, essa hipótese não é válida para altas taxas de armadura de cisalhamento, pois a biela inclinada que é representada pela parcela resistente do concreto não apresentaria o equilíbrio adequado na sua extremidade superior. Assim toda a carga transversal seria resistida apenas pelo aço.

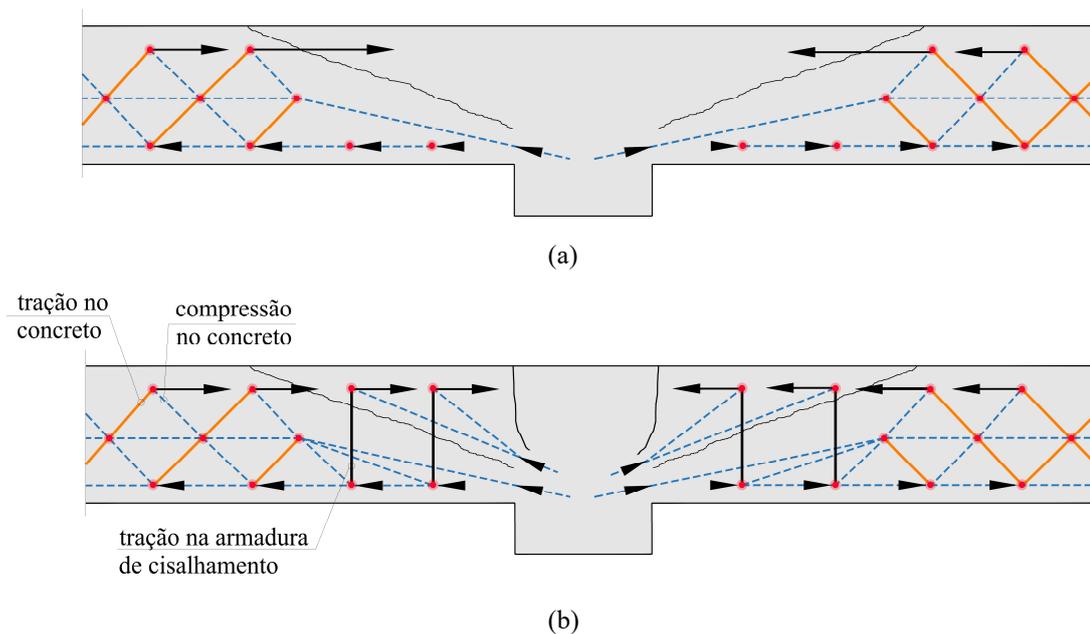


Figura 2.19 – Modelo de treliça: (a) laje sem armadura de cisalhamento; (b) laje com baixas taxas de armadura de cisalhamento (Adaptado de REGAN, 1994)

É importante ressaltar que o modelo proposto por REGAN (1994) é válido apenas para analisar o comportamento de lajes à punção, e não efetivamente propor uma metodologia de cálculo de resistência à punção.

#### 2.4. MODELOS DE BIELAS E TIRANTES PARA ESTIMATIVA DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO

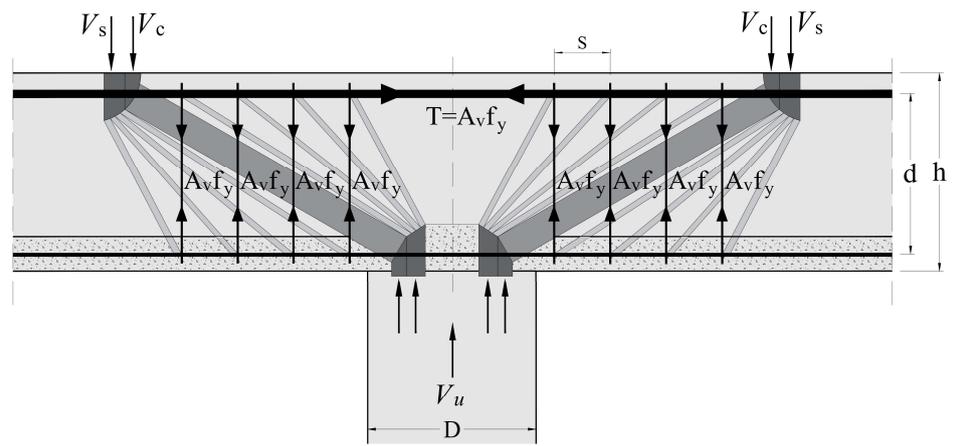
Nesta seção, são apresentados dois modelos de bielas e tirantes empregados na determinação da resistência à punção de lajes lisas com a utilização de armadura de cisalhamento, os quais serão comparados com o método desenvolvido neste trabalho. As seções subsequentes têm o

propósito de elucidar as ideias fundamentais desses modelos e os parâmetros pertinentes a cada formulação.

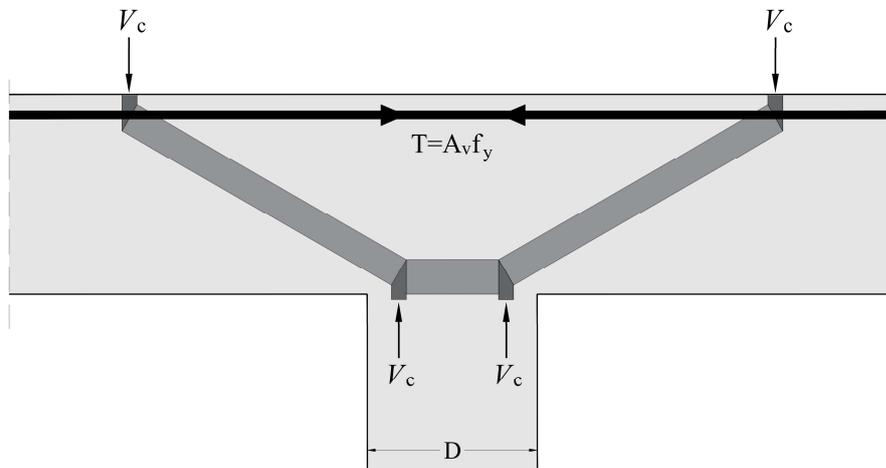
#### 2.4.1. Método de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012)

RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) desenvolveram um modelo de bielas e tirantes para verificar o comportamento à punção simétrica de lajes de concreto com armadura de cisalhamento. O modelo proposto consiste em bielas comprimidas em forma de leque, orientadas em ângulos de  $\theta = 25$  a  $\theta = 65$  graus e ancoradas por um tirante longitudinal (malha de armadura de flexão), tirantes verticais representando as barras de armadura de cisalhamento, na qual estas são efetivas para uma distância  $2 \cdot d$  da face do pilar, e zonas nodais desenvolvidas na interseção das bielas e tirantes.

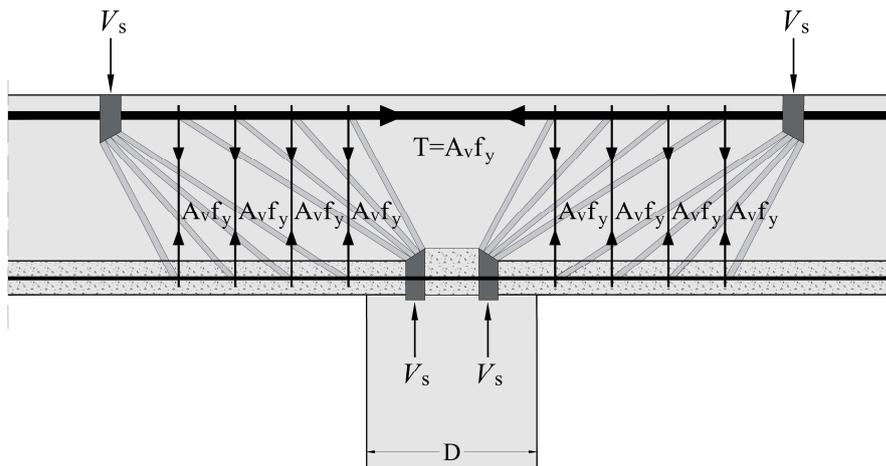
O modelo proposto é mostrado na Figura 2.20a, em que é dado pela soma de dois modelos: o primeiro modelo usa uma biela de compressão direta que vai da carga ao apoio (Figura 2.20b); o segundo modelo considera a armadura de cisalhamento como tirantes verticais e possui bielas em leque sob a carga e sobre o apoio (Figura 2.20c).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.20 – Modelo de bielas e tirantes para lajes armadas ao cisalhamento: (a) modelo com superposição; (b) força  $V_c$  transportada pelo concreto; (c) força  $V_s$  transportada pela armadura de cisalhamento (Adaptado de RIZK, MARZOUK e TILLER, 2012)

As bielas de compressão irradiando do ponto de carga cruzam a armadura de cisalhamento no nível do centroide do aço de flexão, uma vez que uma mudança na força do aço de flexão é necessária para equilibrar a componente horizontal da força na biela de compressão. Com isso, a força na armadura de flexão é aumentada em cada tirante vertical pela componente horizontal da diagonal de compressão que intercepta naquele ponto.

O modelo de bielas e tirantes é resolvido calculando a carga vertical ( $V_u$ ), a qual é baseada em uma largura efetiva de contribuição para cada linha de armadura de punção. A carga  $V_u$  pode ser determinada a partir da resistência máxima do concreto ( $f_{cu}$ ) atuando na espessura da biela cônica. Isso pode ser expresso como a força de compressão reduzida total ( $V_c$ ) ao redor da periferia do pilar circular, que é dada pela área de apoio da periferia da biela cônica multiplicada pela resistência máxima do concreto permitida na biela, mais a contribuição da armadura de cisalhamento cedida ( $V_s$ ), conforme mostra a Equação 2.11. O cálculo da força vertical em cada linha de armadura de cisalhamento é feito assumindo que ocorreu o escoamento do aço. A componente de força vertical em cada um dos nós de compressão deve ser igual ao limite de escoamento de sua armadura de cisalhamento para que o nó esteja em equilíbrio.

$$V_u = 0,75V_c + V_s \quad \text{Equação 2.11}$$

A constante (0,75) é um fator de redução para levar em conta a tensão de punção reduzida para lajes com armadura de cisalhamento. Substituindo as parcelas de  $V_c$  e  $V_s$ , chega-se na Equação 2.12, que contém as variáveis necessárias para calcular  $V_u$ .

$$V_u = 0,75 \left[ \pi \left( D + \frac{2x}{\tan\theta} \right) \frac{x \sin\theta/2}{\sin\theta} f_{cu} \left( \frac{l_{ch}}{d} \right)^{0,33} \sin\theta/2 \right] + [0,9A_v f_{ywd,ef} \cos\theta] \quad \text{Equação 2.12}$$

Em que:

$D$  é o diâmetro do pilar;

$x$  é a profundidade da zona de compressão;

$f_{cu}$  é o valor da resistência ao esmagamento do concreto fissurado, calculado de acordo com CSA-A23.3-04 (2004) do seguinte modo:  $f_{cu} = f'_c / 0,8 + 170 \varepsilon_1 \leq 0,85 f'_c$ ;

$l_{ch}$  é o comprimento equivalente, sendo calculado conforme ZHOU, BARR e LYDON (1995) pela seguinte expressão:  $l_{ch} = -3,84 f'_c + 580$ ;

$d$  é a altura útil;

$A_v f_{ywd,ef} \cos \theta$  é a força total na armadura transversal de cisalhamento dentro de um plano de ruptura assumido.

O plano de ruptura é considerado inclinado em um ângulo  $\theta$  ao eixo da laje e aos estribos inclinados perpendicularmente ao eixo da laje. A resistência efetiva de projeto da armadura de punção  $f_{ywd,ef}$  é calculado de acordo com as recomendações do Eurocode 2 (2014), ilustrado na Equação 2.13.

$$f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq \frac{f_y}{1,15} \quad \text{Equação 2.13}$$

Sendo  $f_y$  a tensão de escoamento do aço.

#### 2.4.2. Método de LYCKA e STEPANEK (2017)

LYCKA e STEPANEK (2017) propõem um modelo de bielas e tirantes para verificar o comportamento à punção de lajes com armadura de cisalhamento, ver Figura 2.21. O modelo é resolvido com a determinação da carga vertical ( $V_u$ ), a qual é obtida calculando a resistência das bielas de compressão a partir do ponto de carga na região nodal, a resistência do tirante vertical e a resistência da própria zona nodal. A ruptura última por punção ocorre quando o concreto atinge sua capacidade resistente à compressão.

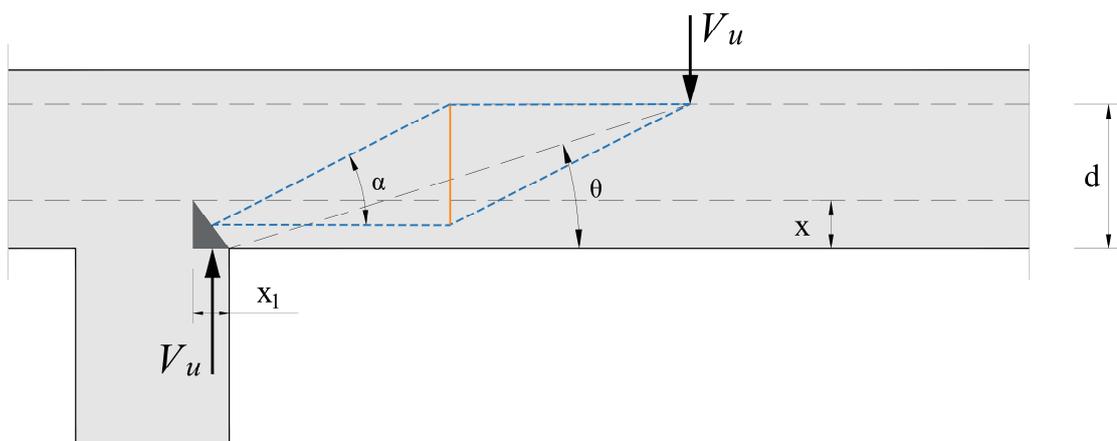


Figura 2.21 – Modelo de bielas e tirantes para lajes com armadura de cisalhamento  
(Adaptado de LYCKA e STEPANEK, 2017)

Para aplicar o método proposto por LYCKA e STEPANEK (2017), precisa-se conhecer alguns parâmetros, como o ângulo da fissura de cisalhamento, a tensão de compressão e a altura da linha neutra.

Os autores consideram que o ângulo  $\theta$  da fissura de cisalhamento é variável e depende da relação de espessura entre o pilar e a laje. Com isso, propõem a Equação 2.14 para calcular o ângulo  $\theta$ , tendo que  $\theta$  não pode ser menor que  $25^\circ$ .

$$\theta = 25^\circ + \left( \frac{d[\text{mm}] - 100}{15} \right) \cdot \left( \frac{d}{c} \right)^{1,5} \geq 25^\circ \quad \text{Equação 2.14}$$

Em que,  $d$  é a altura útil da laje e  $c$  é a dimensão do pilar.

A máxima tensão de compressão permitida ( $\sigma_{r,max}$ ) é considerada a partir das recomendações do Eurocode 2 (2014) para modelos de bielas e tirantes, expressa pela Equação 2.15.

$$\sigma_{r,max} = v \cdot f_c \quad \text{Equação 2.15}$$

Sendo,  $f_c$  a resistência média a compressão cilíndrica do concreto e  $v$  um parâmetro que pode ser determinado pela Equação 2.16.

$$v = 1 - \frac{f_c[\text{MPa}]}{250} \quad \text{Equação 2.16}$$

Para determinar a altura da linha neutra, os autores utilizam a Equação 2.17 proposta por SHEHATA (1985) e SHEHATA (1990).

$$x = 0,8 \sqrt{\eta \cdot \rho_e} \cdot \sqrt{\frac{35}{f_c}} \quad \text{Equação 2.17}$$

Em que:

$$\rho_e = \rho \cdot \left( \frac{f_y[\text{MPa}]}{500} \right) \leq 0,02$$

$$\eta = \frac{E_c}{E_s}$$

Sendo,  $\rho$  a taxa de armadura de flexão,  $E_c$  o módulo de elasticidade do concreto e  $E_s$  o módulo de elasticidade do aço.

Conhecendo os parâmetros anteriores, é possível determinar a resistência do nó, das bielas e tirantes e a resistência fora da área de cisalhamento, como segue:

1) Resistência do nó

LYCKA e STEPANEK (2017) definem o tamanho do nó a partir da dimensão da biela, conforme mostra a Figura 2.22, onde  $x_1$  é a largura do nó,  $x$  é a altura da linha neutra,  $b_d$  é espessura da biela e  $\alpha$  é o ângulo da biela diagonal.

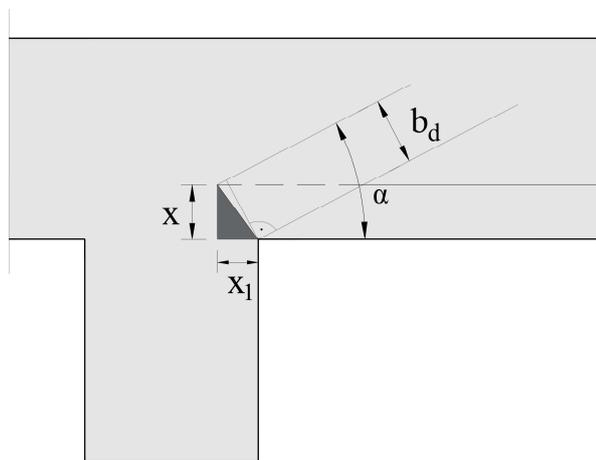


Figura 2.22 – Dimensão do nó e da biela (Adaptado de LYCKA e STEPANEK, 2017)

A resistência do nó deve ser determinada nas seguintes direções, através das Equações 2.18 e 2.19:

a) Direção horizontal

$$V_{nó,1} = \sigma_{r,max} \cdot k \cdot x \cdot u \cdot \tan\alpha \quad \text{Equação 2.18}$$

b) Direção diagonal

$$V_{nó,2} = \sigma_{r,max} \cdot k \cdot b_d \cdot u \cdot \sen\alpha \quad \text{Equação 2.19}$$

Em que:

$$k = \sqrt{\frac{200}{d[\text{mm}]}} \geq 0,5$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{d - 0,5x}{\frac{0,5d}{\tan\theta} + \frac{x_1}{4}}\right)$$

$$b_d = \cos\left[90 - \alpha - \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x^2 + x_1^2}}\right)\right] \cdot \sqrt{x^2 + x_1^2}$$

$$x_1 = \frac{V_{nó,max}}{\sigma_{r,max} \cdot k \cdot u}$$

Sendo,  $u$  a circunferência do pilar e  $k$  o fator de escala da laje,  $V_{nó,max}$  a resistência máxima do nó, e para determiná-la, deve-se iterar as equações de  $V_{nó,1}$  e  $V_{nó,2}$ , até ambos apresentarem valores iguais, ou seja, o valor de  $x_1$  é calculado a partir de iteração. Alternativamente, os autores abordam que para uma estimativa aproximada da resistência à punção da laje, o valor de  $x_1$  pode ser assumido como 70% da altura da linha neutra ( $x_1 = 0,70 \cdot x$ ).

## 2) Resistência das bielas

A resistência das bielas de concreto é determinada no meio delas, e deve ser determinada nas seguintes direções, através das Equações 2.20 e 2.21:

### a) Direção horizontal

$$V_{biela,1} = \left[\frac{\pi(d-0,5x)}{\tan\alpha} + k \cdot u\right] \cdot 0,6 \cdot \sigma_{r,max} \cdot b_d \cdot \text{sen}\alpha \quad \text{Equação 2.20}$$

### c) Direção diagonal

$$V_{biela,2} = \left[\frac{\pi(d-0,5x)}{\tan\theta} + k \cdot u\right] \cdot 0,6 \cdot \sigma_{r,max} \cdot x \cdot \tan\alpha \quad \text{Equação 2.21}$$

### 3) Resistência do tirante

No modelo desenvolvido pelos autores, a armadura de cisalhamento é representada por um único tirante vertical. A resistência deste tirante pode ser determinada a partir da resistência da armadura de cisalhamento ( $V_{sw}$ ) dentro de um plano de ruptura considerado, mais a parcela de contribuição da resistência do concreto ( $V_c$ ) reduzida por um fator  $\beta$ , conforme mostra a Equação 2.22.

$$V_{tirante} = V_{sw} + \beta \cdot V_c \quad \text{Equação 2.22}$$

Em que:

$$V_{sw} = A_{sw,1} \cdot n_r \cdot \frac{1,5d}{s_1} \cdot f_{yw}$$

$$\beta = \frac{0,4 - (100\rho_{w,ef})}{0,4} \geq 0, \text{ onde } \rho_{w,ef} = \frac{A_{sw,1} \cdot n_r}{u_{0,5d} \cdot (s_0 + 0,5s_1)} \cdot \frac{f_{yw}}{450}$$

$$V_c = 0,18 \cdot u_{2d} \cdot d \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3}$$

Nas equações anteriores,  $A_{sw,1}$  representa a área da seção transversal de um ramo da armadura de cisalhamento,  $n_r$  é o número de ramos verticais de armadura de cisalhamento no primeiro perímetro,  $s_1$  é a distância entre o primeiro e o segundo perímetro da armadura de cisalhamento,  $f_{yw}$  é a resistência ao escoamento da armadura de cisalhamento,  $\rho_{w,ef}$  é a taxa efetiva de armadura de cisalhamento,  $u_{0,5d}$  é o perímetro de controle definido em  $0,5d$  da borda da região de apoio (para pilares quadrados o perímetro  $u_{0,5d} = 4c + \pi d$  e para pilares circulares o perímetro  $u_{0,5d} = \pi c + \pi d$ ),  $s_0$  é a distância entre a borda da região de apoio e o primeiro perímetro da armadura de cisalhamento e  $u_{2d}$  é o perímetro de controle definido em  $2d$  da borda da região de apoio.

### 4) Resistência fora da área de cisalhamento

Os autores calculam a resistência fora da área das armaduras de cisalhamento de acordo com Eurocode 2 (2014), pela Equação 2.23.

$$V_{out} = 0,18 \cdot u_{out} \cdot d \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \quad \text{Equação 2.23}$$

Por fim, a carga vertical ( $V_u$ ) na ligação laje-pilar pelo método desenvolvido é dada pela resistência mínima de todos os elementos do modelo de bielas e tirantes, conforme mostra a Equação 2.24, onde  $V_{biela,1}$  e  $V_{biela,2}$  são as resistências das bielas,  $V_{nó,1}$  e  $V_{nó,2}$  são as resistências da região nodal,  $V_{tirante}$  é a resistência que representa a armadura de cisalhamento e  $V_{out}$  é a resistência à punção fora da área reforçada por cisalhamento.

$$V_u = \min \begin{cases} V_{nó,1} \\ V_{nó,2} \\ V_{biela,1} \\ V_{biela,2} \\ V_{tirante} \\ V_{out} \end{cases} \quad \text{Equação 2.24}$$

### 3. METODOLOGIA

Neste capítulo, descreve-se a metodologia proposta, o banco de dados a ser empregado na avaliação do método, bem como a metodologia de análise dos resultados.

O método proposto tem como finalidade verificar a resistência máxima de lajes lisas por meio da resistência ao esmagamento da biela de concreto. Esta metodologia aplica-se especificamente a lajes lisas com armadura de cisalhamento do tipo stud, incluindo *stud rail* e *double headed stud*, disposta em arranjos radiais ao redor de pilares internos com seções circulares ou quadradas, sob carregamento simétrico.

A aplicação do método não abrange lajes lisas que possuam aberturas, nem situações em que os pilares tenham seção retangular. Também não se aplica a lajes com distribuição das armaduras de cisalhamento em cruz ou em grade, nem a outros tipos de armaduras de cisalhamento. Neste estudo, a metodologia é estritamente direcionada aos casos que atendem aos critérios mencionados, garantindo a precisão e a segurança dos resultados obtidos.

É importante destacar que o método não tem por objetivo calcular a resistência relativa à ruptura por tração diagonal. Além disso, não se destina a determinar a resistência à flexão. Para essa finalidade, recomenda-se utilizar metodologias consolidadas na literatura, tais como a teoria da linha de ruptura.

#### 3.1. METODOLOGIA DA PROPOSTA DE CÁLCULO PARA VERIFICAR A RESISTÊNCIA AO ESMAGAMENTO DA BIELA DE CONCRETO EM LAJES LISAS COM ARMADURA DE CISALHAMENTO TIPO STUD

O método propõe a divisão da ligação laje-pilar em  $n$  segmentos axissimétricos, onde  $n$  corresponde ao número de linhas de armadura de cisalhamento. Neste estudo, a abordagem foi restringida ao arranjo radial. O objetivo consiste em desenvolver um modelo de treliça em um segmento axissimétrico, com o intuito de receber, de maneira uniforme, parte da carga vertical aplicada na laje, e direcioná-la ao pilar, visando avaliar a resistência ao esmagamento da biela de concreto adjacente ao pilar (ver Figura 3.1).

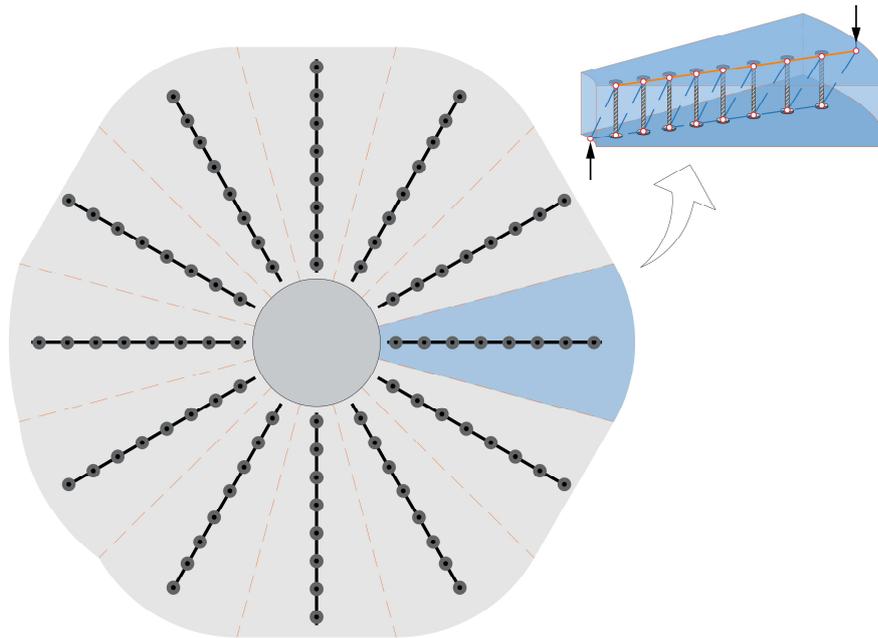


Figura 3.1 – Idealização da laje em segmentos radiais

Para determinar a resistência ao esmagamento da biela de concreto adjacente ao pilar, é necessário calcular, de forma racional, a dimensão da biela e a carga máxima que ela pode suportar. A partir disso, é possível determinar a carga vertical máxima de um segmento de laje e, posteriormente, esse valor é multiplicado pelo número de segmentos, a fim de obter a resistência teórica total da laje.

### 3.1.1. Premissas fundamentais

#### 1) Segmento axissimétrico

Foi assumido que a ligação laje-pilar pode ser idealizada como sendo composta por  $n$  segmentos axissimétricos, como feito por KINNUNEN e NYLANDER (1960) e MENETREY (1994). Com o objetivo de verificar a resistência máxima à punção utilizando um segmento de laje (ver Figura 3.2), é necessário que as lajes lisas possuam uma distribuição radial das armaduras de cisalhamento e que o pilar tenha seção circular. No caso de pilares com seção quadrada, deve-se convertê-los para uma seção circular de perímetro equivalente, utilizando a Equação 3.1.

$$D = \frac{4c}{\pi} \quad \text{Equação 3.1}$$

Sendo:

$c$  o lado do pilar;

$D$  o diâmetro do pilar.

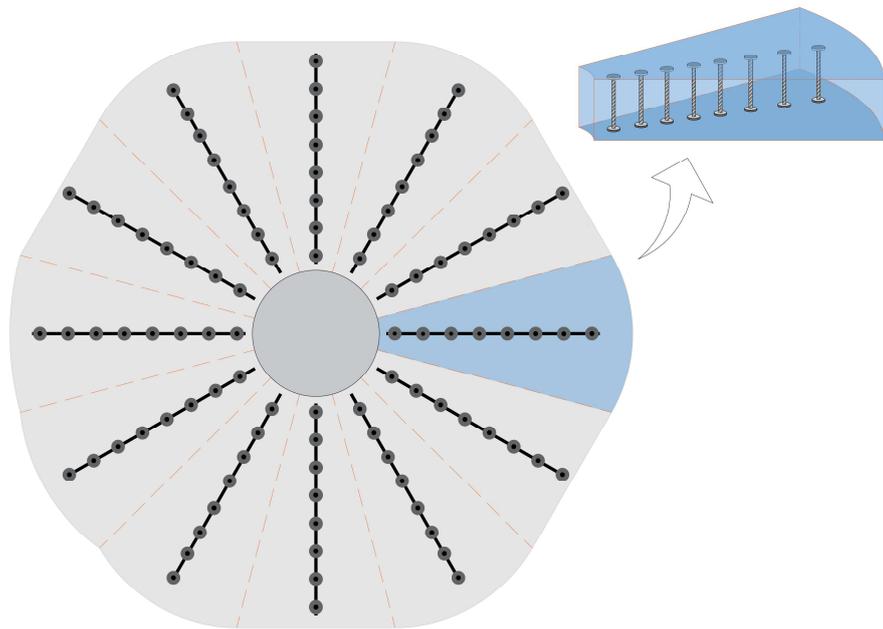


Figura 3.2 – Segmento axissimétrico

2) Treliça estaticamente estável (em equilíbrio) e determinável (isostático)

Diversos trabalhos sobre lajes lisas com armadura de cisalhamento, como os de FERREIRA (2010), PEREIRA FILHO (2021) e NASCIMENTO (2020), mostram que, quando a laje é carregada, ocorre um padrão de tensões que se assemelha a um leque se espalhando das primeiras camadas de armadura de cisalhamento em direção ao pilar. Esse leque representa as bielas de compressão que transferem parte da carga para os apoios. Quando o concreto fissura, parte dessas bielas de compressão pode ser interrompida ou desviada pela formação de fissuras (Figura 3.3). Nos ensaios realizados por BEUTEL (2002), todos os cortes das lajes mostraram uma formação de bielas em leque na região das primeiras camadas de armadura de cisalhamento, partindo do pilar, ver Figura 3.4.

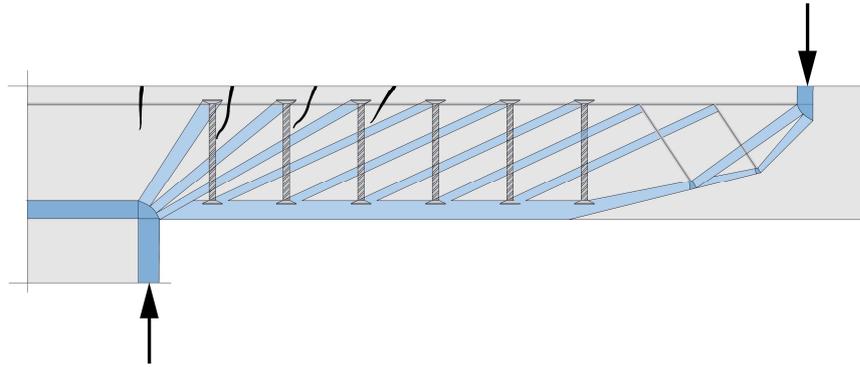


Figura 3.3 – Bielas em concreto fissurado



Figura 3.4 – Corte da laje Z3 (BEUTEL, 2002)

Para representar o fluxo de tensões ilustrado nas Figuras 3.3 e 3.4, seria necessário um modelo de treliça hiperestática. No entanto, criar um modelo com essa configuração tornaria os cálculos complexos. Diante disso, com o intuito de simplificar a concepção do modelo de bielas e tirantes e o processo de cálculo, este trabalho propõe um modelo isostático, com apenas um caminho de carga, conforme mostrado na Figura 3.5.

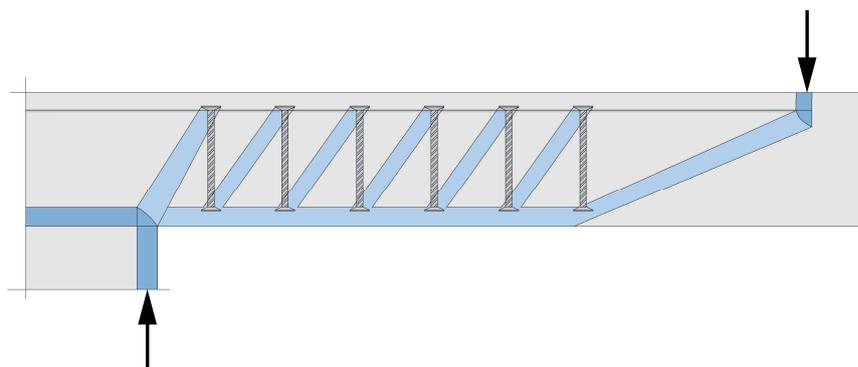


Figura 3.5 – Modelo de treliça isostática

3) Verificação da resistência ao esmagamento da biela na região da extremidade superior  
 A resistência ao esmagamento da biela adjacente ao pilar pode ser verificada na região da extremidade inferior, entre a biela e o pilar, ou na região da extremidade superior, entre a biela e a cabeça do stud (Figura 3.6). CLASSEN e KALUS (2023) afirmam que a região da

extremidade inferior da biela está submetida a um confinamento multiaxial, com forças compressivas em várias direções, que pode aumentar significativamente a capacidade de carga e a resistência à ruptura. Por outro lado, a região da extremidade superior da biela está submetida a tensões de compressão e tração. Esta zona superior é afetada por fissuras radiais e tangenciais devido aos esforços de flexão na laje, o que pode reduzir a eficiência da biela e comprometer sua capacidade resistente. Devido à criticidade das condições na extremidade superior da biela, esta região será utilizada como critério para a avaliação da ruína da biela.

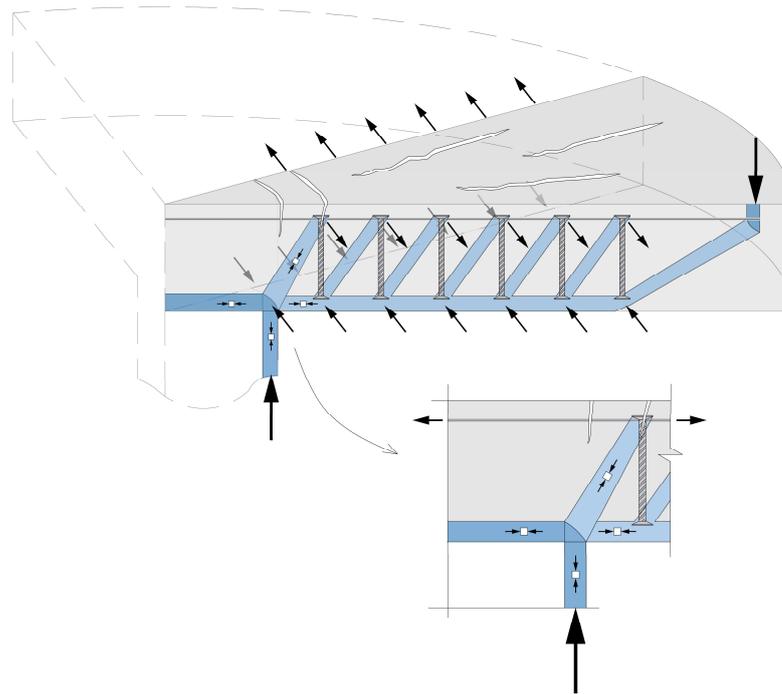


Figura 3.6 – Representação esquemática das forças de compressão e tração

### 3.1.2. Critérios para posicionamento dos banzos, montantes e diagonais

A Figura 3.7 ilustra uma laje qualquer com altura total ( $h$ ), altura útil ( $d$ ), distância do centroide das armaduras de flexão à superfície superior da laje ( $c'$ ), diâmetro da armadura de flexão ( $\phi$ ), espaçamento entre as armaduras de flexão ( $s$ ), espaçamento entre a face do pilar e a primeira camada de armadura de cisalhamento ( $s_0$ ), espaçamento entre camadas de armaduras de cisalhamento ( $s_R$ ), diâmetro da armadura de cisalhamento ( $\phi_w$ ), dimensão da cabeça do conector ( $d_h$ ), distância da superfície superior do conector de aço à superfície superior da laje ( $c_h$ ) e o raio de carregamento da laje ( $r_q$ ).



- Montantes (Tirantes Verticais): posicionados no centroide de cada conector de aço, com a altura limitada pelos banzos;
- Diagonais (Bielas Prismáticas Inclinadas): posicionados de maneira a fechar o caminhamento das cargas no modelo de treliça, deve ter inclinação com base no diagrama de esforço cortante;
- Nós (CCC, CCT e CTT): posicionados nas regiões onde os demais elementos da treliça se interceptam, como no encontro entre montantes e/ou diagonais com os banzos superior e inferior. No caso do nó CCC, será posicionado no encontro do banzo inferior com a posição do centro de carga ( $C_q$ ), determinada pela Equação 3.3, proposta por FERREIRA (2010).

$$C_q = D \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \quad \text{Equação 3.3}$$

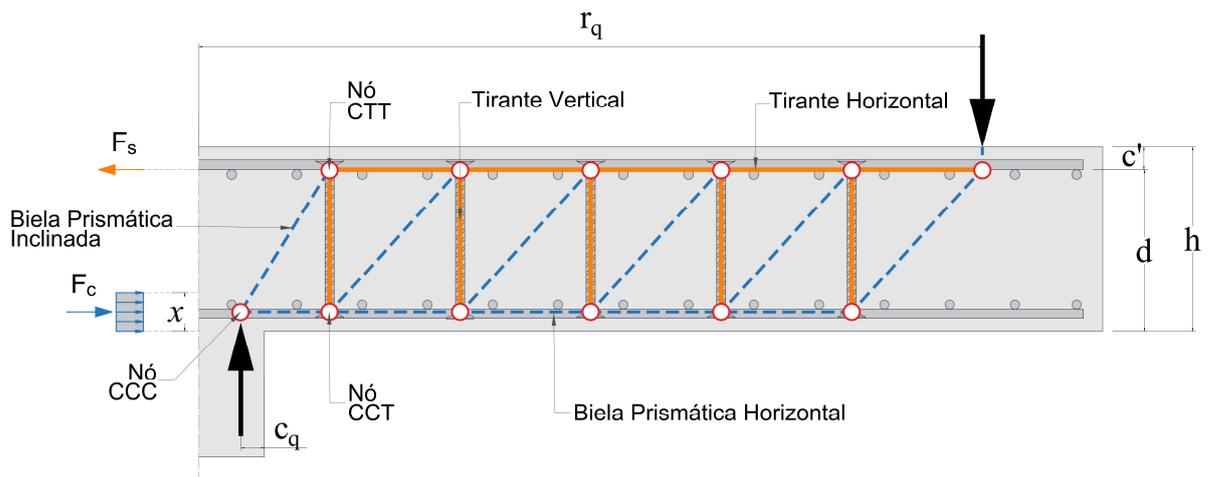


Figura 3.8 – Modelo proposto de bielas e tirantes em laje lisa

### 3.1.3. Critérios para concepção da geometria dos elementos de treliça

A transmissão de esforços entre os elementos de aço e concreto, ou entre os tirantes e as bielas do modelo, é realizada por meio de um mecanismo de ancoragem mecânica, desempenhada pela cabeça dos conectores. Quando o stud é submetido a uma força de tração, forma-se um cone de concreto ao redor da cabeça do conector. Em virtude disso, a geometria da região nodal dos studs será representada por um cone de concreto com um ângulo de espraçamento de  $35^\circ$ , conforme indicado em estudos de ELIGEHAUSEN e SAWADE (1989) e ELIGEHAUSEN *et al.* (1992) e OZBOLT e ELIGEHAUSEN (1990). No entanto, para definir a dimensão do cone de concreto, também será avaliado o espaçamento em planta e em vista, a fim de evitar a

sobreposição dos cones de concreto dos conectores adjacentes. A definição da geometria da região nodal é crucial para estabelecer a geometria da biela.

Na Figura 3.9a, é apresentada a concepção da geometria dos nós em torno da extremidade do conector de aço e da biela principal. A Figura 3.9b mostra que a geometria dos studs possui a face superior definida pela dimensão da cabeça do conector ( $d_h$ ), a face inferior determinada pela largura ( $L$ ) e altura ( $y$ ). A Figura 3.9c ilustra a configuração da biela principal, cuja geometria abrange todo o perímetro externo dos nós CTT e CCC. Essa geometria é definida pela sua espessura ( $w_s$ ), pelo ângulo de inclinação ( $\theta$ ) – que, no caso de verificação de lajes existentes, não possui limite angular, mas, para projetos, recomenda-se limitar a inclinação a  $60^\circ$  – e pela largura ( $L$ ) em planta, conforme mostrado na Figura 3.10.

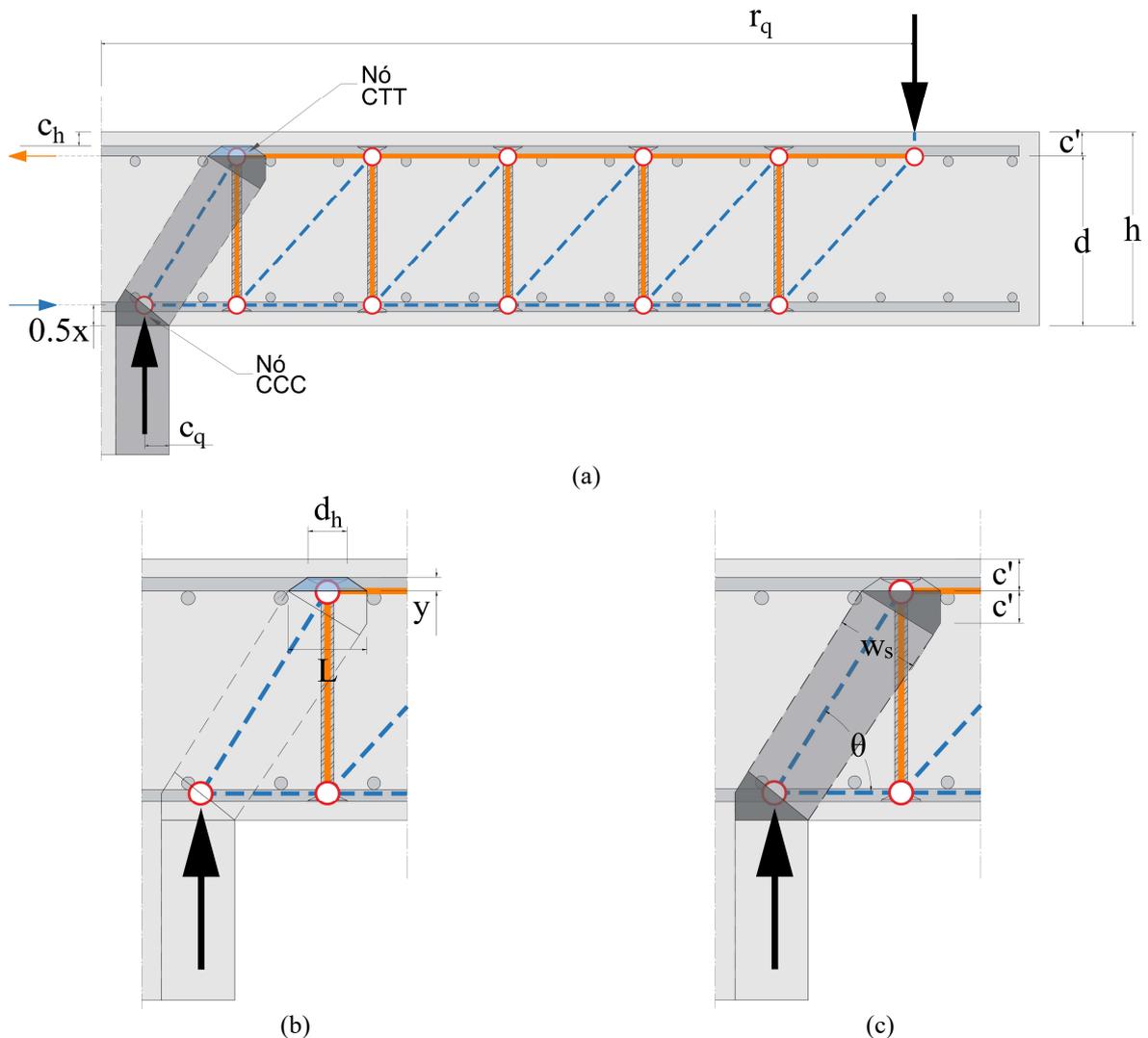


Figura 3.9 – Concepção das geometrias: (a) geometria dos nós em torno da cabeça dos conectores e da biela principal; (b) detalhe da dimensão do nó; (c) detalhe da dimensão da biela

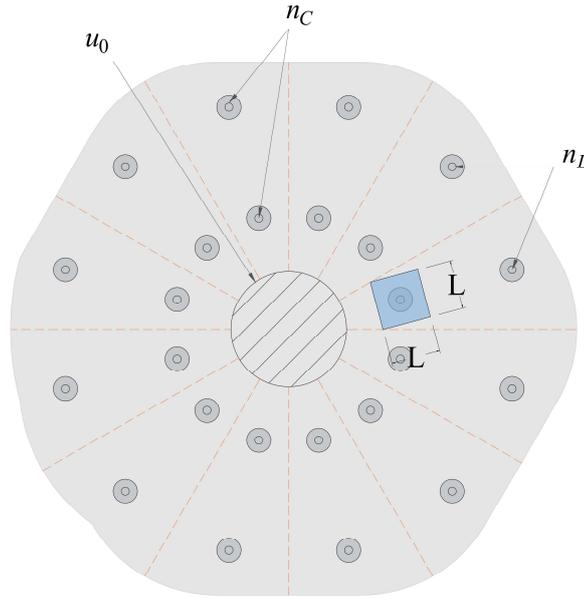


Figura 3.10 – Geometria do nó em planta

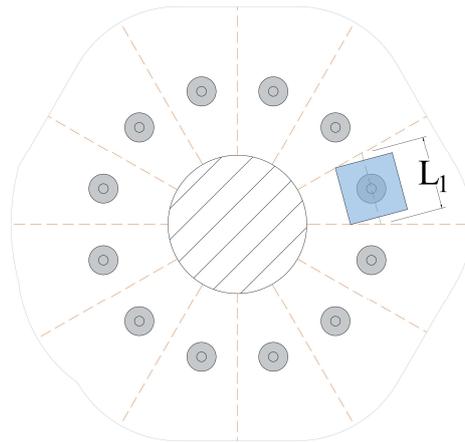
Sendo  $u_0$  o perímetro do pilar circular ( $u_0 = \pi \cdot D$ ),  $n_C$  o número de camadas e  $n_L$  o número de linhas de armadura de cisalhamento. A largura  $L$  é semelhante tanto para o nó quanto para a biela, determinada pela menor medida entre: a largura limite entre as linhas da primeira camada de armadura de cisalhamento, em planta ( $L_1$ ); a largura limite entre a face do pilar e o centro do espaçamento  $s_R$ , em vista ( $L_2$ ); e a largura resultante do espraio do cone de concreto em  $35^\circ$  ( $L_3$ ). As larguras abordadas são apresentadas na Equação 3.4. A Figura 3.11 ilustra as larguras mencionadas.

$$L = \text{menor} \begin{cases} L_1 = \frac{(\frac{c}{2} + s_0) \cdot u_0}{\frac{D}{2} \cdot n_L} \\ L_2 = \begin{cases} s_R, & \text{se } s_0 \geq s_R/2 \\ 2s_0, & \text{se } s_0 < s_R/2 \end{cases} \\ L_3 = d_h + 2 \sqrt{\frac{y^2}{\cos^2 55^\circ} - y^2} \end{cases} \quad \text{Equação 3.4}$$

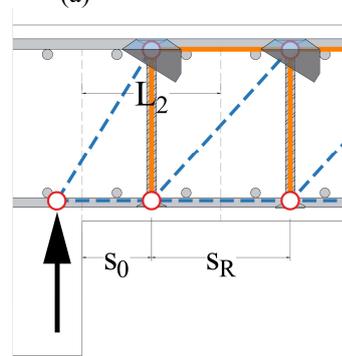
Sendo:

$$d_h = 3\phi_w \quad \text{Equação 3.5}$$

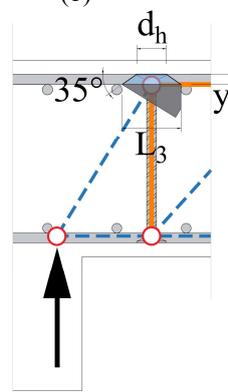
$$y = h - d - c_h \quad \text{Equação 3.6}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.11 – Largura limite da região nodal: (a) largura limite ( $L_1$ ) entre as linhas da primeira camada de armadura de cisalhamento, em planta; (b) largura limite ( $L_2$ ) entre a face do pilar e o centro do espaçamento  $s_R$ , em vista; (c) largura resultante do espraio do cone em  $35^\circ$  ( $L_3$ )

#### 3.1.4. Equações para estimativa da resistência da biela principal

A resistência da biela ( $F_R$ ) será calculada multiplicando a área da face perpendicular ao seu eixo – a qual está próxima ao nó em torno da cabeça dos conectores – pela tensão admissível de compressão na biela, conforme demonstrado na Equação 3.7.

$$F_R = w_s \cdot L \cdot f_{cs} \quad \text{Equação 3.7}$$

Em que:

$$f_{cs} = 0,85 \cdot \beta_c \cdot \beta_s \cdot f'_c \quad \text{Equação 3.8}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{d - \frac{x}{2}}{\frac{D}{2} + \frac{c}{2} + c_q + s_0}\right) \quad \text{Equação 3.9}$$

$$w_s = L \cdot \text{sen}(\theta) + (c') \cdot \text{cos}(\theta) \quad \text{Equação 3.10}$$

$$c' = h - d \quad \text{Equação 3.11}$$

Sendo  $f_{cs}$  a tensão admissível de compressão na biela conforme proposto pelo ACI 318 (2019),  $\beta_s$  o fator de eficiência da biela definido com base no tipo de biela (neste estudo, foi adotado  $\beta_s = 0,55$ , pois a biela está sendo verificada na região nodal superior, localizada em uma zona com tensões de tração e compressão) e  $\beta_c$  um fator de modificação de confinamento (com valor utilizado  $\beta_c = 1$ ).

Conhecendo a carga máxima que a biela pode suportar ( $F_R$ ), é possível determinar a carga vertical máxima de um segmento da laje ( $V$ ), usando a Equação 3.12. A Figura 3.12 ilustra as variáveis mencionadas.

$$V = F_R \cdot \text{sen}(\theta) \quad \text{Equação 3.12}$$

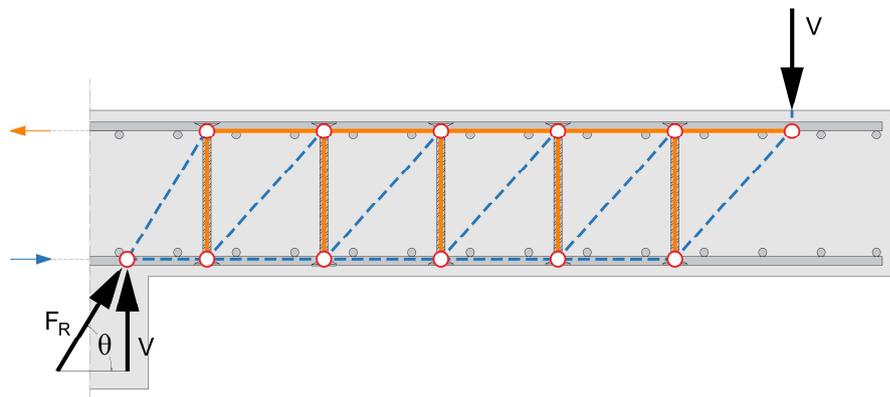


Figura 3.12 – Resistência de um segmento de laje

Por fim, a resistência teórica total da laje ( $V_{teo}$ ) é determinada pela Equação 3.13, que é obtida multiplicando-se a resistência de um segmento pelo número de linhas de armadura de cisalhamento, uma vez que cada linha de armadura corresponde a um segmento.

$$V_{teo} = n_L \cdot V \quad \text{Equação 3.13}$$

### 3.2. METODOLOGIA DA COLETA DO BANCO DE DADOS

Para avaliar o método proposto, realizou-se uma extensa pesquisa na literatura científica sobre os resultados de ensaios experimentais de lajes lisas armadas ao cisalhamento sob carregamento simétrico, com arranjo radial e ruptura na resistência máxima à punção. Para tal finalidade, foram estabelecidos alguns critérios de filtragem. O primeiro critério utilizado foi excluir lajes com armaduras de cisalhamento que não garantiam ancoragem nas duas extremidades, como o *stud interno*. Além disso, foram eliminadas as lajes armadas ao cisalhamento com distribuição em forma de cruz ou grade. O último critério foi descartar as lajes em que a falha não ocorreu na resistência máxima à punção. Para isso, avaliou-se o modo de ruptura informado pelo autor e o corte do espécime ensaiado. Com isso, foram considerados 15 resultados de ensaios experimentais para compor o banco de dados.

As principais características das lajes estão apresentadas na Tabela 3.1 e Tabela 3.2, onde são mostrados os nomes dos autores e das lajes, a altura das lajes ( $h$ ), a altura útil ( $d$ ), a distância da superfície superior do conector de aço até a superfície da laje ( $c_h$ ), o tipo de seção do pilar, em que  $D$  (diâmetro) representa os pilares circulares e  $C$  (lado) representa os pilares quadrados, a dimensão dos pilares ( $c$ ), a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), o diâmetro ( $\phi$ ) e a taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ), a tensão de escoamento do aço de flexão ( $f_{ys}$ ), o espaçamento entre as armaduras de flexão ( $s$ ), o módulo de elasticidade das armaduras de flexão ( $E_s$ ), o diâmetro dos conectores ( $\phi_w$ ), a taxa de armadura de cisalhamento ( $\rho_w$ ), a tensão de escoamento dos conectores ( $f_{ysw}$ ), o número de linhas ( $n_L$ ) e o número de camadas ( $n_C$ ) das armadura de cisalhamento, o espaçamento entre a face do pilar e a primeira camada de armadura de cisalhamento ( $s_0$ ), espaçamento entre camadas de armaduras de cisalhamento ( $s_R$ ), o tipo de arranjo, o raio de carregamento da laje ( $r_q$ ), o modo de ruptura e a carga de ruptura ( $V_u$ ).

Tabela 3.1 – Resumo das características das lajes lisas

Autores	Lajes	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$c_h$ (mm)	Seção	$c$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$\emptyset$ (mm)	$\rho$ (%)	$f_{ys}$ (MPa)	$s$ (mm)	$E_s$ (MPa)
FERREIRA <i>et al.</i> (2021)	SR1	210	157	10	C	400	29,2	25	2,01	527	150	192
CANTONE <i>et al.</i> (2019)	PC24	250	209	20	C	260	37,0	20	1,50	570	100	200
FURCHE (2017)	DKA-O	285	250	15	D	263	29,9	20	1,25	500	100	200
	DKA-E	285	250	15	D	263	31,2	20	2,25	500	100	200
HALVONIK e MAJTANOVA (2018)	S1-1	250	200	30	D	180	38,2	20	1,57	577	100	200
	S2-1	250	200	30	D	180	28,1	20	1,57	538	100	200
EINPAUL <i>et al.</i> (2016)	PR1	250	210	15	C	260	31,0	20	1,50	515	100	200
LIPS, RUIZ e MUTTONI (2012)	PL6	250	197	15	C	130	36,6	20	1,59	557	100	210
	PL7	250	210	15	C	260	35,9	20	1,59	583	100	210
MUTTONI e BUJNAK (2012)	PP4	250	211	15	C	260	30,9	20	1,49	500	100	200
	PP5	250	205	15	C	260	31,5	20	1,53	500	100	200
BEUTEL (2002)	Z2	285	250	20	D	200	26,3	15	0,80	889	88	197
	Z4	285	250	20	D	200	31,5	15	0,80	889	88	197
	Z5	285	250	15	D	263	28,0	20	1,25	562	100	197
	Z6	285	250	15	D	200	37,3	20	1,25	562	100	197

Tabela 3.2 – Resumo das características das lajes lisas (Continuação)

Autores	Lajes	$\emptyset_w$ (mm)	$\rho_w$ (%)	$f_{ysw}$ (MPa)	$n_L$	$n_C$	$s_0$ (mm)	$s_R$ (mm)	Arranjo	$r_q$ (mm)	Modo de Ruptura	$V_u$ (kN)
FERREIRA <i>et al.</i> (2021)	SR1	16	1,15	509	12	8	80	100	radial	1125	máx	1580
CANTONE <i>et al.</i> (2019)	PC24	16	1,35	523	12	6	80	105	radial	1100	máx	2150
FURCHE (2017)	DKA-O	16	0,54	500	12	5	53	188	radial	1200	máx	2085
	DKA-E	16	0,54	500	12	5	95	188	radial	1200	máx	1975
HALVONIK e MAJTANOVA (2018)	S1-1	10	0,81	500	15	10	70	80	radial	1180	máx	1520
	S2-1	10	0,86	500	16	10	70	80	radial	1180	máx	1250
EINPAUL <i>et al.</i> (2016)	PR1	14	1,04	580	12	5	120	105	radial	1300	máx	1654
LIPS, RUIZ e MUTTONI (2012)	PL6	14	1,01	519	12	6	80	160	radial	1380	máx	1363
	PL7	14	0,93	519	16	7	80	160	radial	1380	máx	1773
MUTTONI e BUJNAK (2012)	PP4	16	0,94	550	12	4	80	150	radial	765	máx	2076
	PP5	16	0,96	550	12	6	80	150	radial	1120	máx	1812
BEUTEL (2002)	Z2	14	0,42	580	12	5	88	200	radial	1200	máx	1375
	Z4	14	0,48	580	12	5	88	175	radial	1200	máx	1579
	Z5	16	0,54	540	12	5	94	188	radial	1200	máx	1957
	Z6	16	0,59	540	12	5	94	188	radial	1200	máx	1887

A Figura 3.13 mostra a distribuição das principais características das lajes, como a altura útil ( $d$ ), a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), a taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ) e a taxa de armadura de cisalhamento ( $\rho_w$ ).

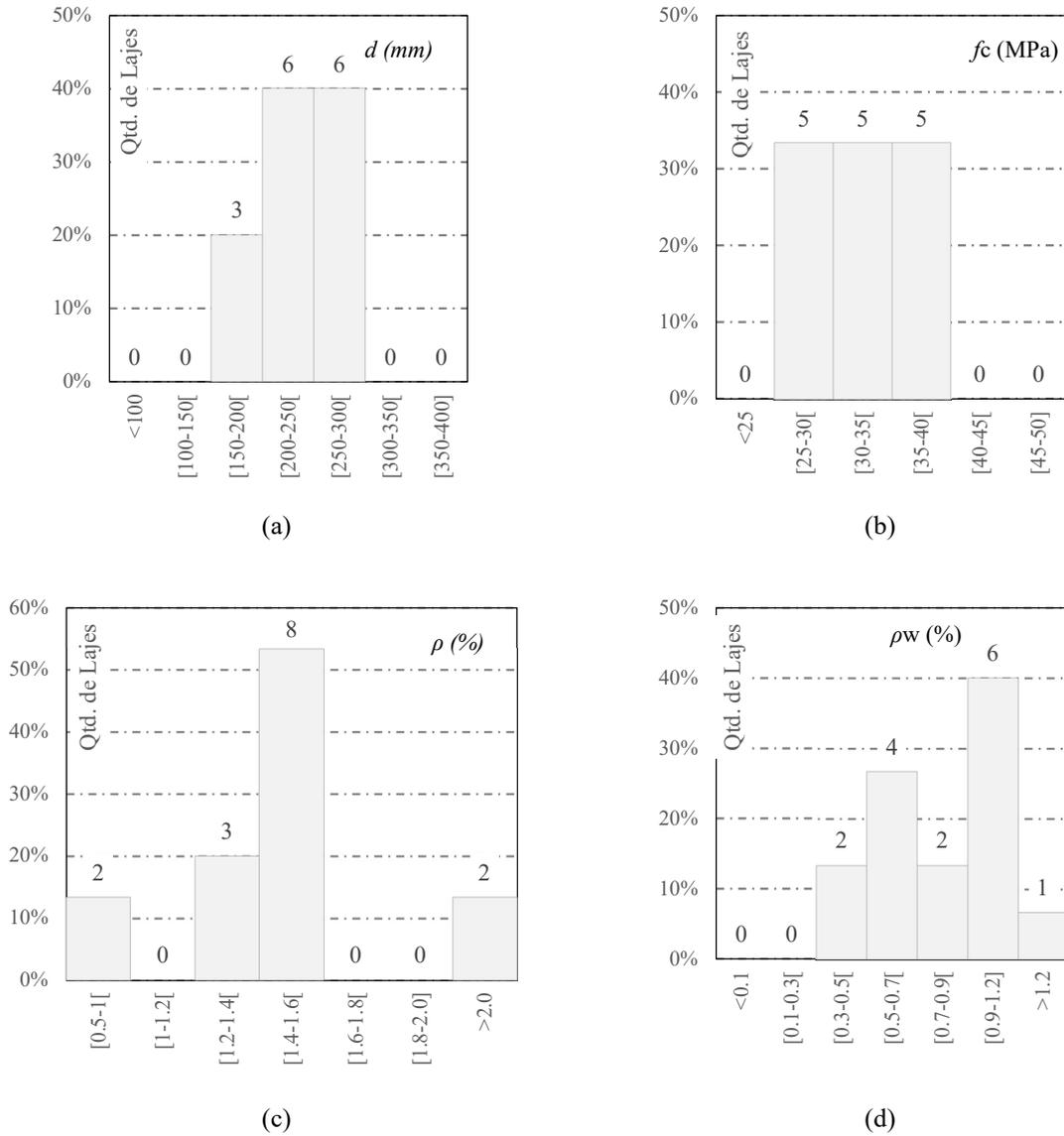


Figura 3.13 – Distribuição das principais características dos espécimes que compõe o banco de dados: (a) altura útil ( $d$ ); (b) resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ); (c) taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ); (d) taxa de armadura de cisalhamento ( $\rho_w$ )

### 3.2.1. Apresentação das lajes lisas com armadura de cisalhamento

Nas Figuras 3.14 a 3.17, são mostradas algumas características das lajes, que são armadas com conectores de aço dispostos radialmente.

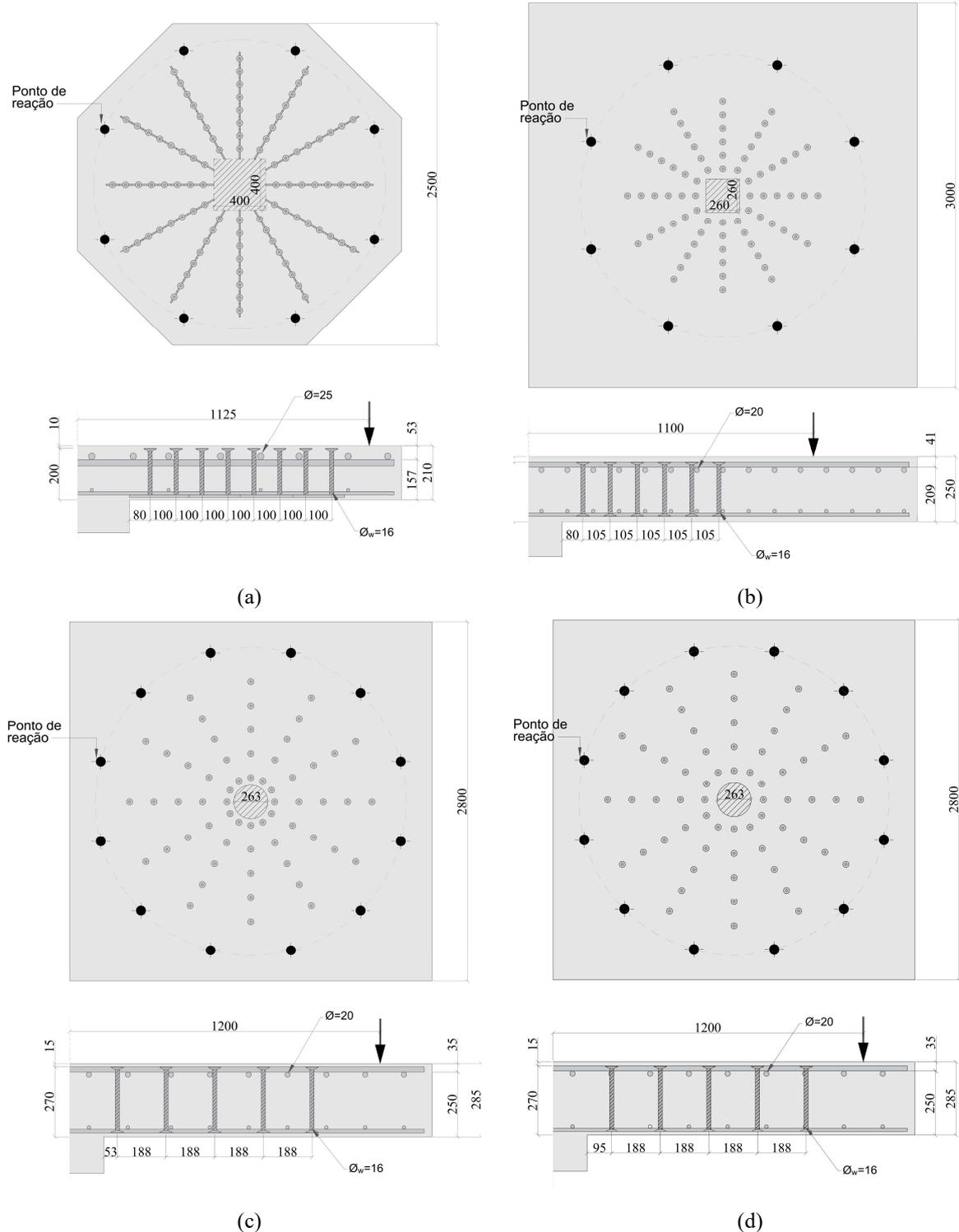
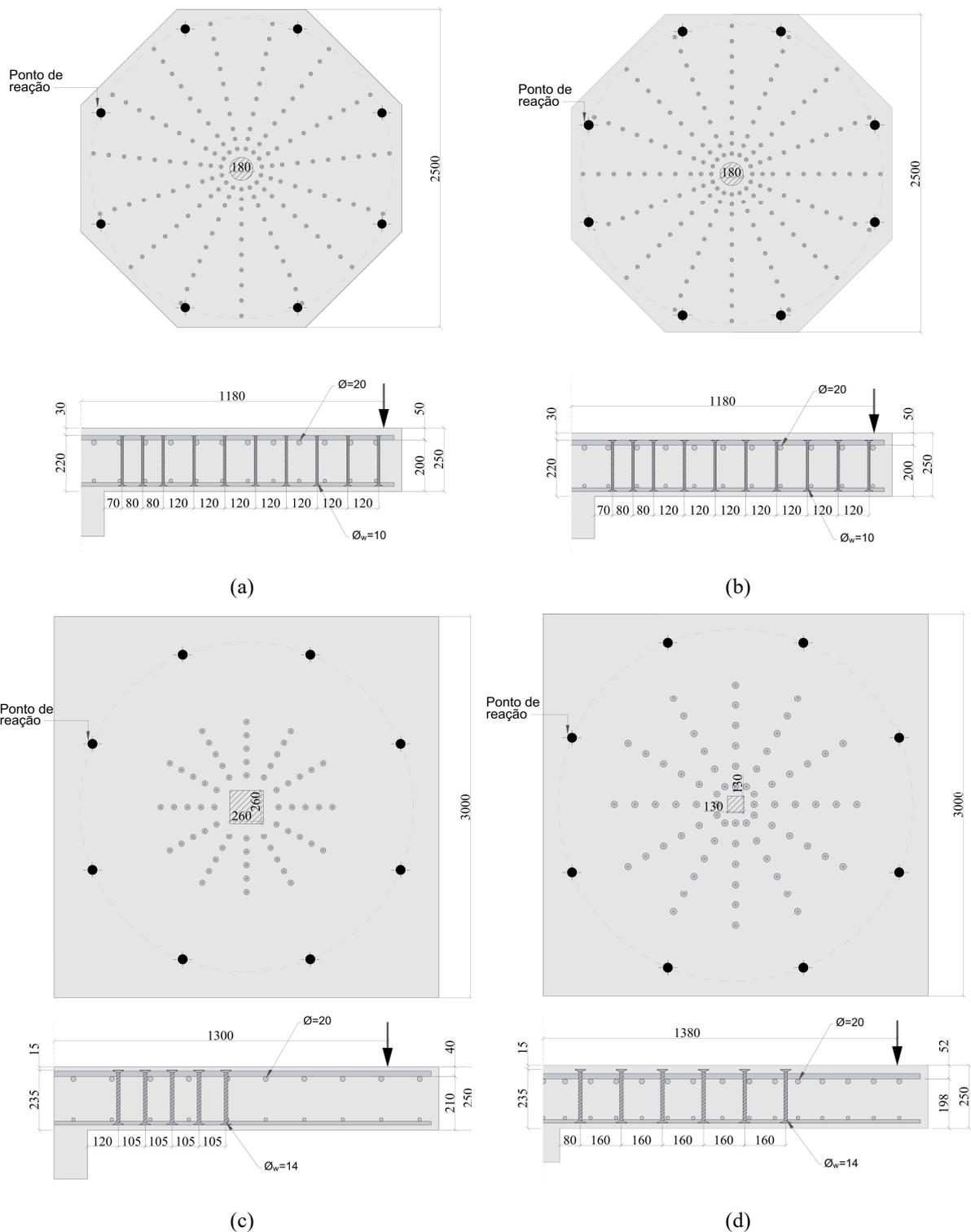
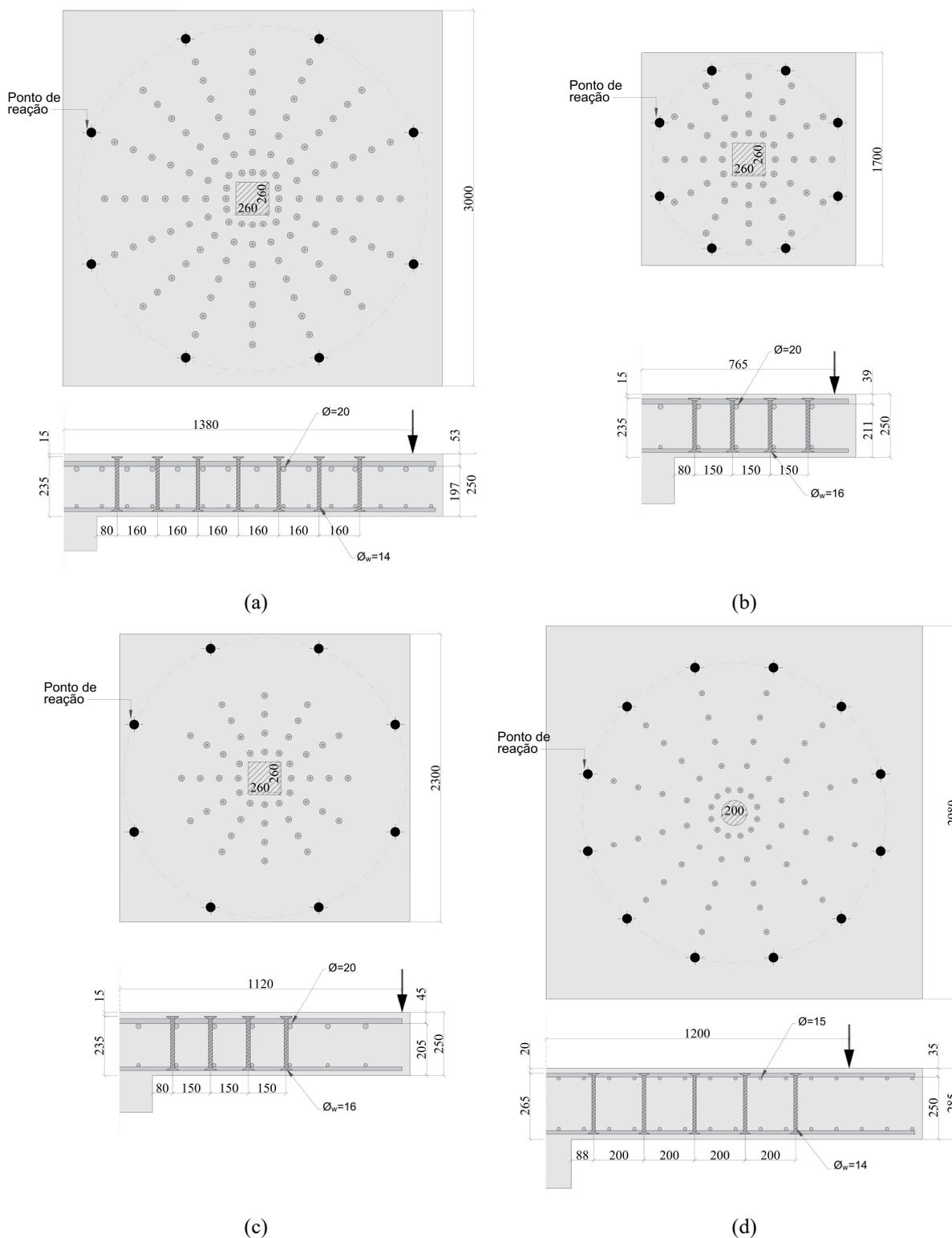


Figura 3.14 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje SR1 (Adaptado de FERREIRA *et al.*, 2021); (b) laje PC24 (Adaptado de CANTONE *et al.*, 2019); (c) laje DKA-O (Adaptado de FURCHE, 2017); (d) laje DKA-E (Adaptado de FURCHE, 2017)

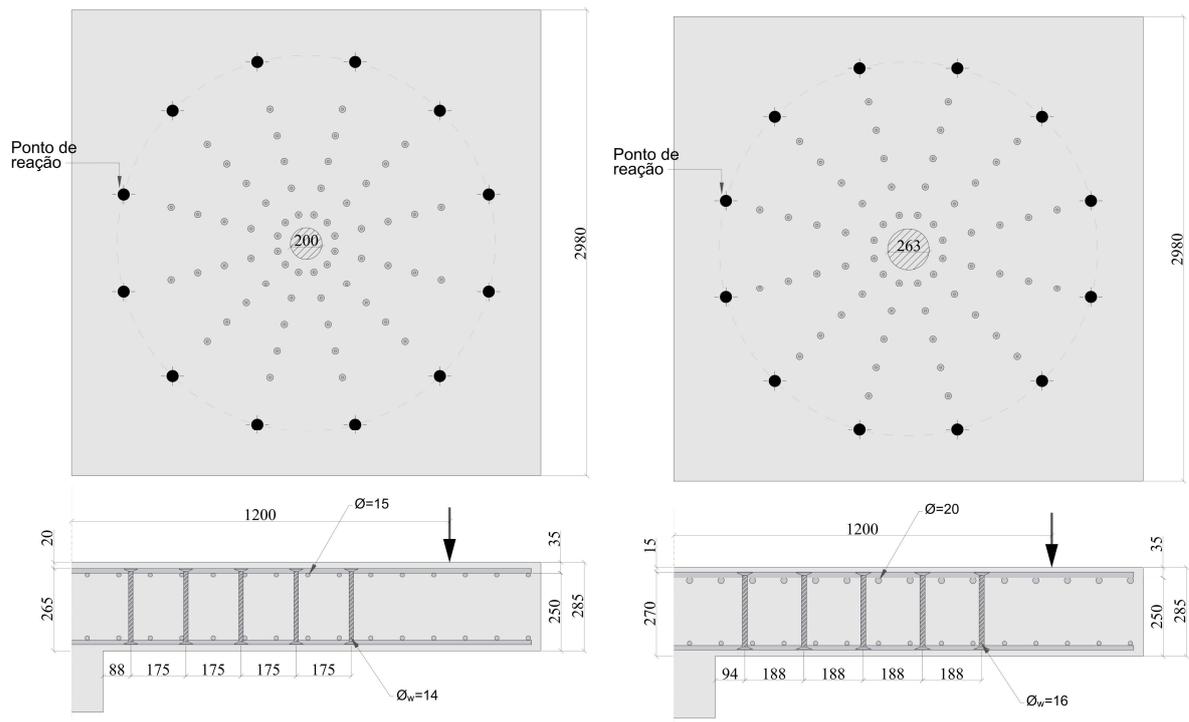


(a) (b) (c) (d)

Figura 3.15 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje S1-1 (Adaptado de HALVONIK e MAJTANOVA, 2018); (b) laje S2-1 (Adaptado de HALVONIK e MAJTANOVA, 2018); (c) laje PR1 (Adaptado de EINPAUL *et al.*, 2016); (d) laje PL6 (Adaptado de LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012)

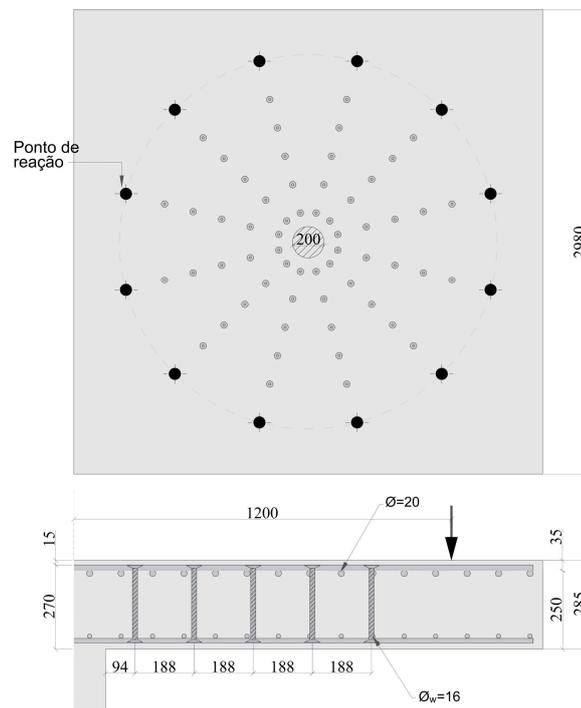


(a) (b)  
 (c) (d)  
 Figura 3.16 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje PL7 (Adaptado de LIPS, RUIZ e MUTTONI, 2012); (b) laje PP4 (Adaptado de MUTTONI e BUJNAK, 2012); (c) laje PP5 (Adaptado de MUTTONI e BUJNAK, 2012); (d) laje Z2 (Adaptado de BEUTEL, 2002)



(a)

(b)



(c)

Figura 3.17 – Geometria das lajes lisas (cotas em milímetros): (a) laje Z4 (Adaptado de BEUTEL, 2002); (b) laje Z5 (Adaptado de BEUTEL, 2002); (c) laje Z6 (Adaptado de BEUTEL, 2002)

### 3.3. METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos resultados foi realizada comparando a razão entre a carga de ruptura experimental e a carga teórica ( $V_u/V_{teo}$ ). Além disso, foram avaliados parâmetros estatísticos como a média dos resultados, o desvio padrão, o coeficiente de variação e a porcentagem de resultados em que a razão entre a carga de ruptura experimental e a teórica foi menor que um ( $V_u/V_{teo} < 1$ ), indicando os casos em que a resistência teórica superou a resistência experimental.

Simultaneamente, foram feitas análises gráficas da distribuição de  $V_u/V_{teo}$ , evidenciando a tendência média dos resultados e comparando com retas que sugerem o resultado ideal ( $V_u = V_{teo}$ ). Somado a isso, foram gerados diagramas de caixa para visualizar a dispersão de todos os pontos de dados, destacando os resultados máximos e mínimos nas extremidades, a maior probabilidade de ocorrência dos resultados na “caixa” central e a mediana na linha central da caixa.

Por fim, as recomendações foram avaliadas pelo critério “Demerit Points Classifications” (DPC) de COLLINS (2001). Este critério propõe uma classificação para diferentes modos de dimensionamento considerando segurança, precisão e economia. A classificação é determinada por meio de uma escala de pontos de demérito para valores de  $V_u/V_{teo}$ , conforme apresentado na Tabela 3.3. A penalidade das recomendações é calculada pela soma dos produtos de  $V_u/V_{teo}$  pelo seu respectivo escore. Quanto maior a soma das penalidades, pior é a recomendação normativa.

Tabela 3.3 – Escala de demérito do critério DPC

$V_u/V_{teo}$	Classificação	Penalidade
$< 0,50$	Extremamente Perigoso	10
$[0,50 - 0,65[$	Perigoso	5
$[0,65 - 0,85[$	Baixa Segurança	2
$[0,85 - 1,15[$	Segurança Adequada	0
$[1,15 - 2,00[$	Conservador	1
$\geq 2,00$	Extremamente Conservador	2

## 4. RESULTADOS

Neste capítulo, é apresentada a aplicação das lajes do banco de dados no método proposto, juntamente com análises comparativas entre os resultados desse método e os obtidos por métodos normativos, como ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023) e fib Model Code 2020 (2023), assim como os métodos desenvolvidos por RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017). E, por fim, são realizadas análises estatísticas, análise da dispersão dos resultados e penalizações segundo o “Demeter Points Classification” (DPC) com o intuito de avaliar o desempenho dos diferentes métodos empregados.

### 4.1. APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

A aplicação do método consistiu em seguir as recomendações apresentadas na Seção 3.1. Isso inclui, inicialmente, a determinação do diâmetro ( $D$ ), do centro de carga ( $C_q$ ), da força de compressão ( $F_c$ ), do bloco de compressão ( $x$ ), da largura limite entre as linhas da primeira camada de armadura de cisalhamento, em planta ( $L_1$ ), da largura limite entre a face do pilar e o centro do espaçamento  $s_R$ , em vista ( $L_2$ ), da largura resultante do espriamento do cone em  $35^\circ$  ( $L_3$ ), do ângulo de inclinação da biela ( $\theta$ ), da largura da biela em planta ( $L$ ) e em vista ( $w_s$ ), da tensão admissível de compressão na biela ( $f_{cs}$ ) e da resistência das bielas ( $F_R$ ). Os resultados estão apresentados na Tabela 4.1 e Tabela 4.2.

Tabela 4.1 – Resistência máxima da biela

Autores	Lajes	$D$ (mm)	$C_q$ (mm)	$F_c$ (kN)	$x$ (mm)	DIMENSÃO – NÓ			DIMENSÃO – BIELA			$f_{cs}$ (MPa)	$F_R$ (kN)
						$L_1$ (mm)	$L_2$ (mm)	$L_3$ (mm)	$\theta$ (°)	$L$ (mm)	$w_s$ (mm)		
FERREIRA <i>et al.</i> (2021)	SR1	509	93	777	49	147	100	171	48	100	110	13,7	150
CANTONE <i>et al.</i> (2019)	PC24	331	60	537	41	110	105	108	61	105	112	17,3	203
FURCHE (2017)	DKA-O	263	48	471	56	97	106	105	66	97	102	14,0	138
	DKA-E	263	48	471	54	119	188	105	57	105	107	14,6	165
HALVONIK e MAJTANOVA (2018)	S1-1	180	33	363	50	67	80	87	60	67	83	17,9	99
	S2-1	180	33	338	63	63	80	87	59	63	80	13,1	66
EINPAUL <i>et al.</i> (2016)	PR1	331	60	485	45	131	105	113	52	105	108	14,5	164

Tabela 4.2 – Resistência máxima da biela (Continuação)

Autores	Lajes	D (mm)	C <sub>q</sub> (mm)	F <sub>c</sub> (kN)	x (mm)	DIMENSÃO – NÓ			DIMENSÃO – BIELA			f <sub>cs</sub> (MPa)	F <sub>R</sub> (kN)
						L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (mm)	L <sub>3</sub> (mm)	θ (°)	L (mm)	w <sub>s</sub> (mm)		
LIPS, RUIZ e MUTTONI (2012)	PL6	166	30	350	54	76	160	148	62	76	92	17,1	119
	PL7	331	60	549	44	82	160	151	59	82	98	16,8	136
MUTTONI e BUJNAK (2012)	PP4	331	60	471	43	110	150	117	61	110	115	14,4	183
	PP5	331	60	471	43	110	150	134	60	110	118	14,7	191
BEUTEL (2002)	Z2	200	36	314	56	98	175	85	61	85	91	12,3	95
	Z4	200	36	314	47	98	175	85	61	85	91	14,7	114
	Z5	263	48	530	68	118	188	105	57	105	107	13,1	147
	Z6	200	36	353	45	101	188	105	60	101	105	17,4	187

Nas Figuras 4.1 a 4.5 exibidas abaixo, são mostradas as lajes com o ângulo de inclinação da biela, as dimensões dos nós e das bielas (apenas da região de análise), assim como a carga máxima que as bielas podem suportar.

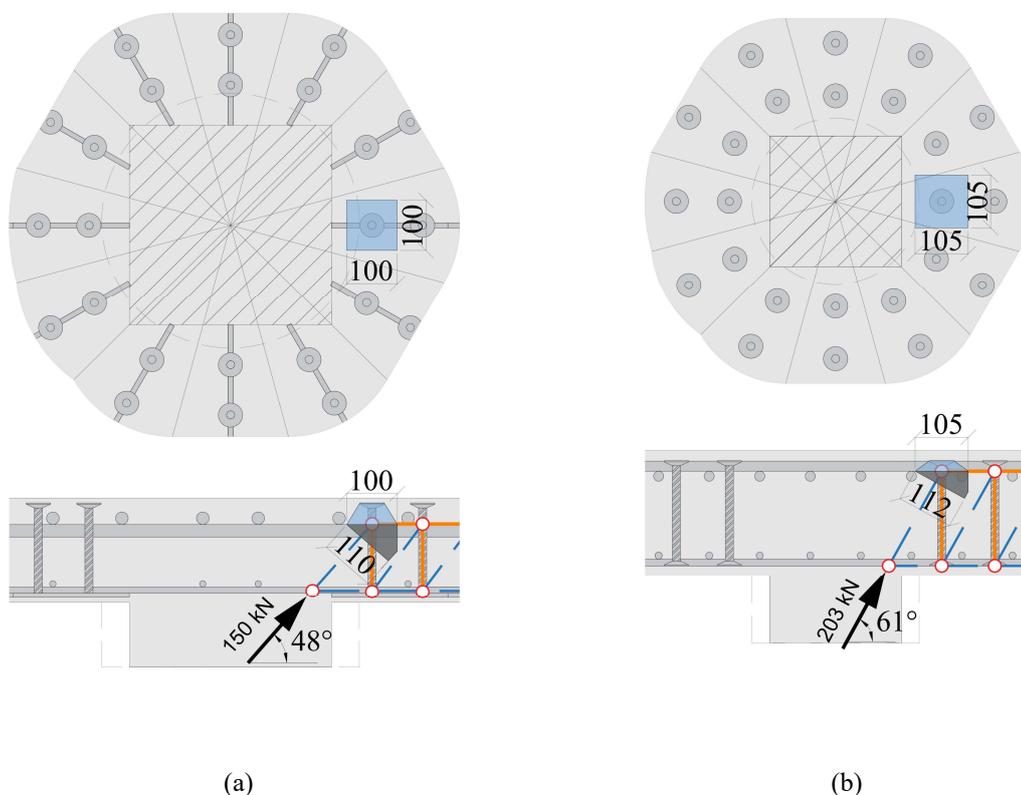


Figura 4.1 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje SR1; (b) laje PC24

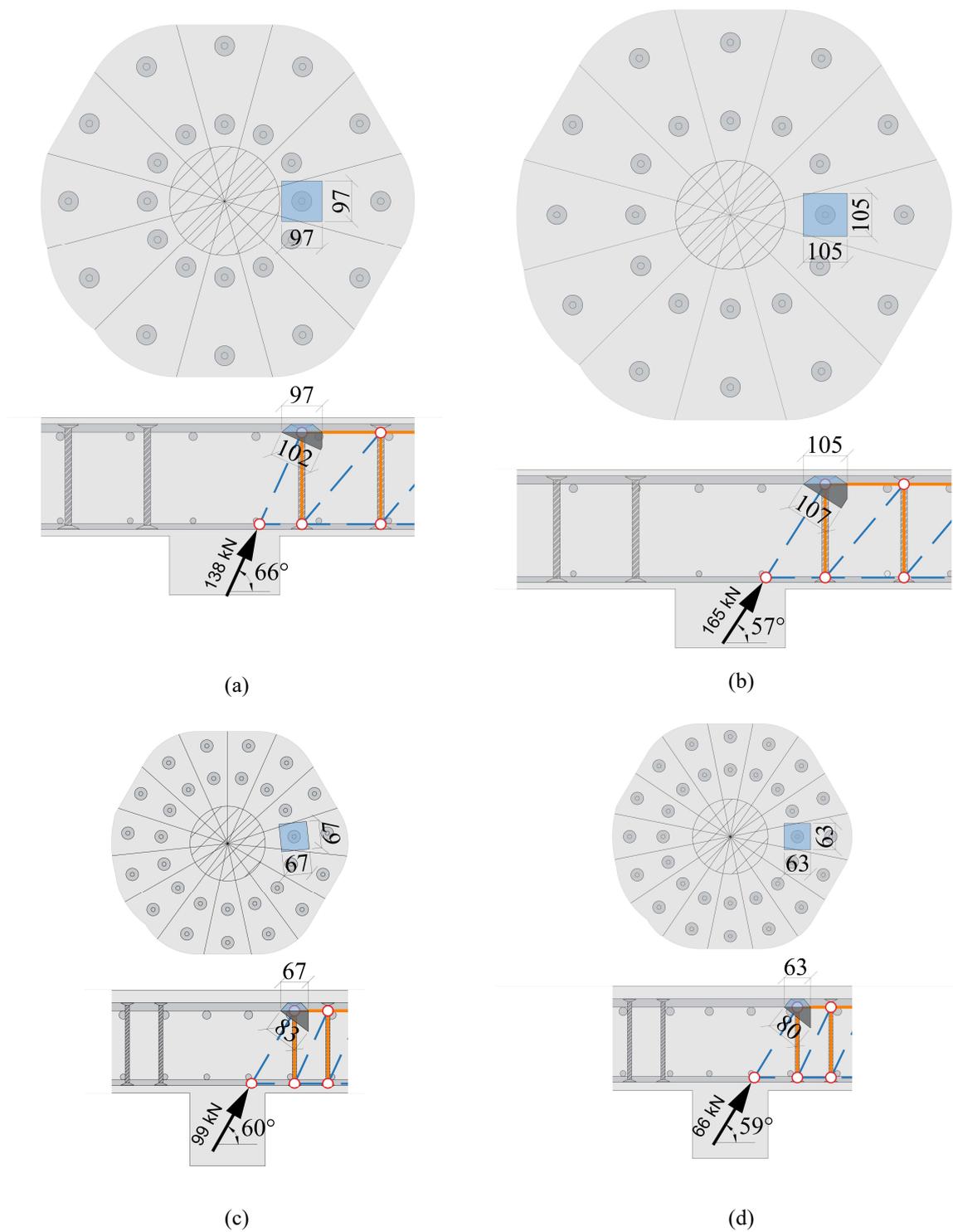
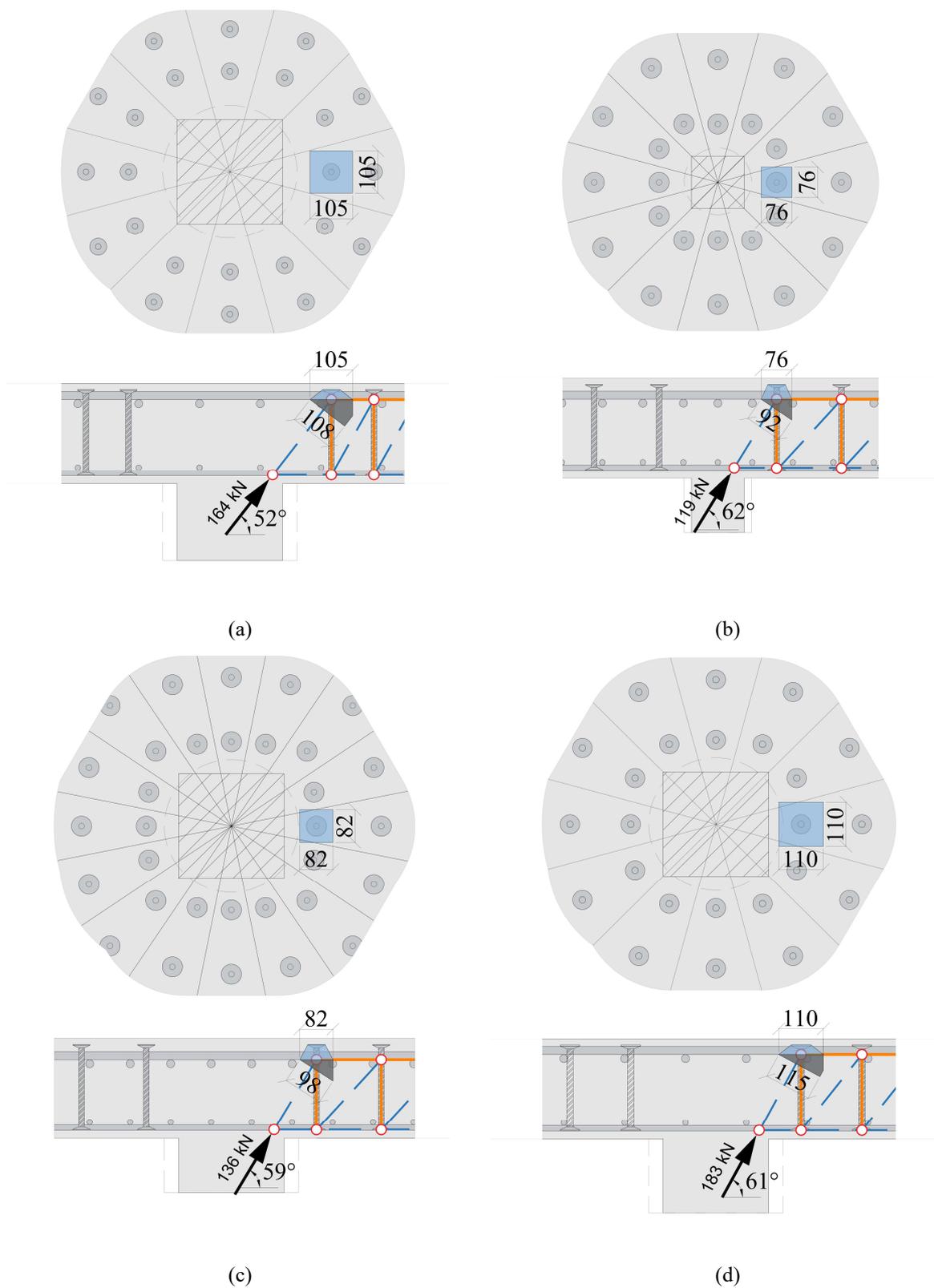


Figura 4.2 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje DKA-O; (b) laje DKA-E; (c) laje S1-1; (c) laje S2-1



(a) (b) (c) (d)  
 Figura 4.3 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje PR1; (b) laje PL6; (c) laje PL7; (c) laje PP4

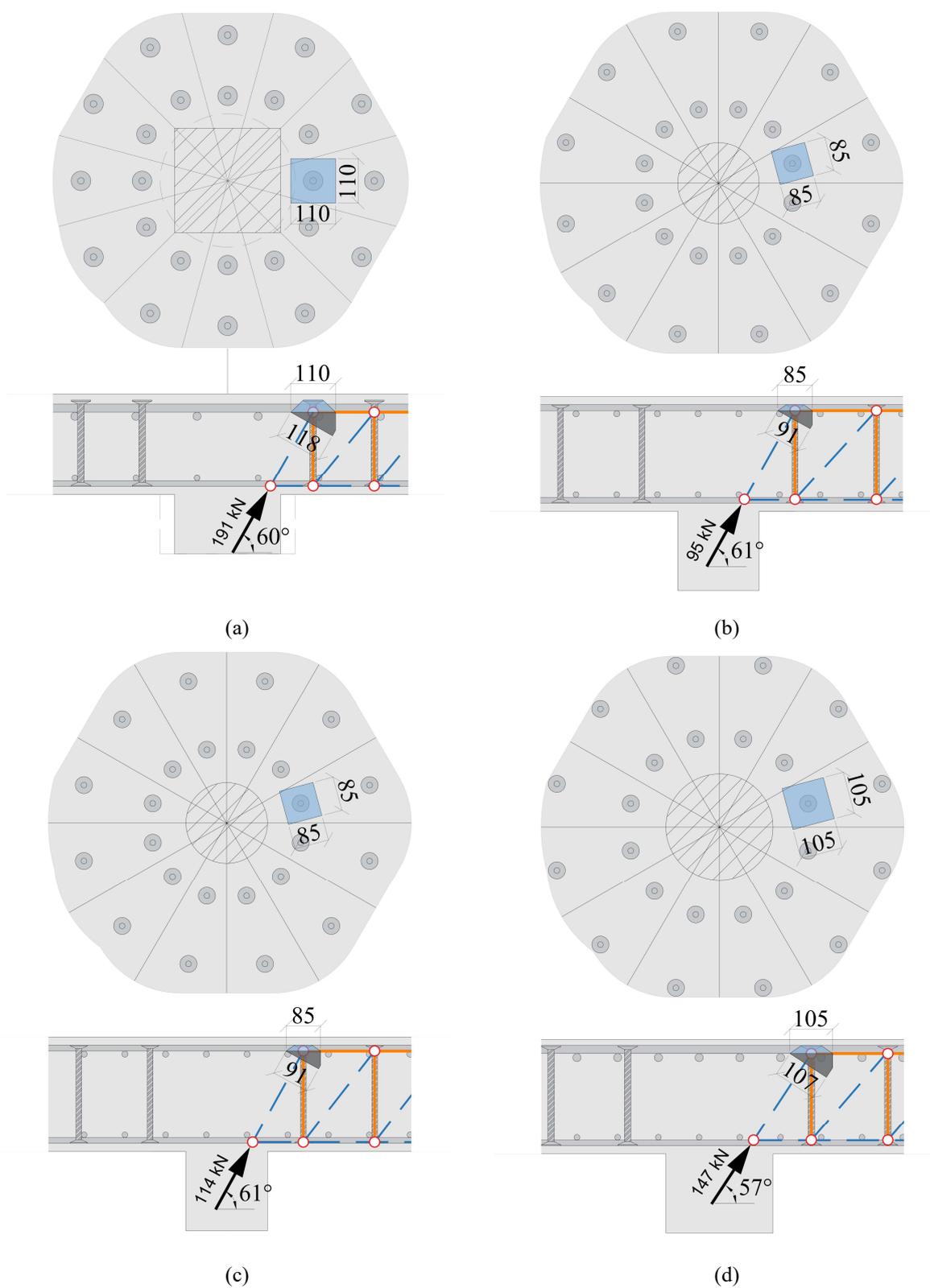
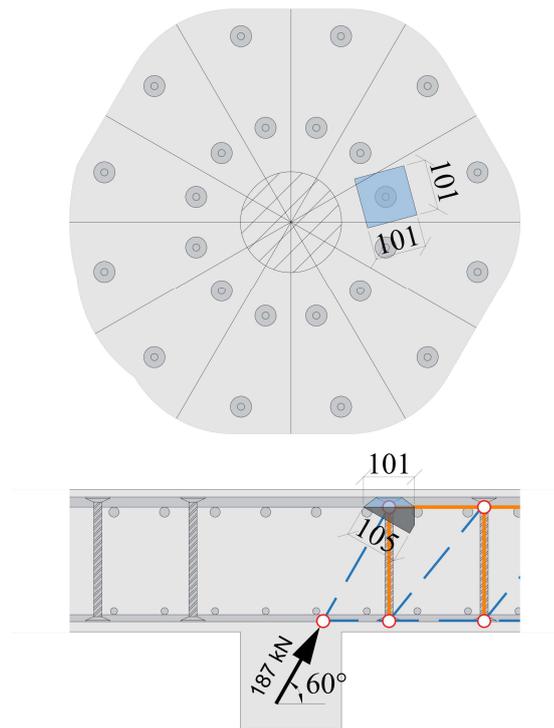


Figura 4.4 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje PP5; (b) laje Z2; (c) laje Z4; (c) laje Z5



(a)

Figura 4.5 – Carga máxima de compressão, dimensões dos nós e das bielas (cotas em milímetros): (a) laje Z6

Com base na capacidade máxima suportada pelas bielas, foi possível determinar a carga vertical máxima de um segmento de laje e, ao multiplicar pelo número de segmentos, encontrou-se a resistência teórica das lajes. A Tabela 4.3 e a Tabela 4.4 exibem os valores de cargas experimentais ( $V_u$ ), a carga vertical máxima de um segmento de laje ( $V$ ), a resistência teórica da laje ( $V_{teo,mét}$ ) e a relação  $V_u/V_{teo,mét}$ .

Tabela 4.3 – Determinação da resistência teórica das lajes

Autores	Lajes	$V_u$ (kN)	$V$ (kN)	$V_{teo,mét}$ (kN)	$V_u/V_{teo,mét}$
FERREIRA <i>et al.</i> (2021)	SR1	1580	112	1345	1,17
CANTONE <i>et al.</i> (2019)	PC24	2150	177	2128	1,01
FURCHE (2017)	DKA-O	2085	126	1511	1,38
	DKA-E	1975	139	1664	1,19
HALVONIK e MAJTANOVA (2018)	S1-1	1520	86	1287	1,18
	S2-1	1250	56	899	1,39

Tabela 4.4 – Determinação da resistência teórica das lajes (Continuação)

<b>Autores</b>	<b>Lajes</b>	<b><math>V_u</math> (kN)</b>	<b><math>V</math> (kN)</b>	<b><math>V_{teo,mét}</math> (kN)</b>	<b><math>V_u/V_{teo,mét}</math></b>
EINPAUL <i>et al.</i> (2016)	PR1	1654	130	1556	1,06
LIPS, RUIZ e MUTTONI (2012)	PL6	1363	105	1255	1,09
	PL7	1773	116	1863	0,95
MUTTONI e BUJNAK (2012)	PP4	2076	160	1920	1,08
	PP5	1812	166	1989	0,91
BEUTEL (2002)	Z2	1375	83	996	1,38
	Z4	1579	100	1200	1,32
	Z5	1957	123	1480	1,32
	Z6	1887	162	1944	0,97

Analisando os resultados da Tabela 4.3 e Tabela 4.4, observa-se que, das 15 lajes registradas no banco de dados, apenas três apresentaram uma relação  $V_u/V_{teo} < 1$ , indicando que a resistência teórica superou a resistência experimental, com valores entre 0,91 e 0,97. Os demais resultados foram satisfatórios, com valores variando entre 1,01 a 1,38.

#### 4.2. ANÁLISE COMPARATIVA COM MÉTODOS NORMATIVOS E MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

Os resultados obtidos por meio do método proposto foram comparados com os resultados teóricos fornecidos pelas normas ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023) e fib Model Code 2020 (2023), bem como com os métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017).

Na Tabela 4.5, além dos resultados obtidos pelo método proposto, foram incluídos os resultados das recomendações normativas. A análise dos resultados revela que, em comparação com as demais normas, o ACI 318 (2019) apresentou os maiores valores na relação  $V_u/V_{ACI}$ , variando de 1,27 a 1,90. Por outro lado, o novo Eurocode 2 (2023), baseado em uma simplificação do fib Model Code, mostrou menores valores na relação  $V_u/V_{EC2}$ , variando de 1,05 a 1,36. O fib Model Code 2020 (2023) registrou dois casos em que a resistência teórica superou a resistência experimental, com  $V_u/V_{MC20}$  variando de 0,88 a 1,28. Além disso, a ABNT NBR 6118 (2023)

apresentou cinco resultados em que a resistência teórica foi maior que a resistência experimental, com a relação  $V_u/V_{NBR}$  variando de 0,75 a 1,37.

Tabela 4.5 – Comparativo entre os resultados das previsões normativas e do método proposto

Autores	Lajes	$V_u$ (kN)	$V_{teo,mét}$ (kN)	$V_u/V_{teo,mét}$	$V_{ACI}$ (kN)	$V_u/V_{ACI}$	$V_{EC2}$ (kN)	$V_u/V_{EC2}$	$V_{NBR}$ (kN)	$V_u/V_{NBR}$	$V_{MC20}$ (kN)	$V_u/V_{MC20}$
FERREIRA <i>et al.</i> (2021)	SR1	1580	1345	1,17	936	1,69	1365	1,16	2099	0,75	1235	1,28
CANTONE <i>et al.</i> (2019)	PC24	2150	2128	1,01	1181	1,82	1711	1,26	2220	0,97	1786	1,20
FURCHE (2017)	DKA-O	2085	1511	1,38	1308	1,59	1707	1,22	1762	1,18	1963	1,06
	DKA-E	1975	1664	1,19	1336	1,48	1744	1,13	1827	1,08	2251	0,88
HALVONIK e MAJTANOVA (2018)	S1-1	1520	1287	1,18	880	1,73	1119	1,36	1186	1,28	1389	1,09
	S2-1	1250	899	1,39	755	1,66	960	1,30	914	1,37	1239	1,01
EINPAUL <i>et al.</i> (2016)	PR1	1654	1556	1,06	1088	1,52	1579	1,05	1922	0,86	1598	1,03
LIPS, RUIZ e MUTTONI (2012)	PL6	1363	1255	1,09	778	1,75	1027	1,33	1042	1,31	1267	1,08
	PL7	1773	1863	0,95	1068	1,66	1533	1,16	2041	0,87	1535	1,15
MUTTONI e BUJNAK (2012)	PP4	2076	1920	1,08	1094	1,90	1636	1,27	1925	1,08	1871	1,11
	PP5	1812	1989	0,91	1059	1,71	1584	1,14	1902	0,95	1621	1,12
BEUTEL (2002)	Z2	1375	996	1,38	1085	1,27	1199	1,15	1198	1,15	1475	0,93
	Z4	1579	1200	1,32	1187	1,33	1274	1,24	1401	1,13	1566	1,01
	Z5	1957	1480	1,32	1265	1,55	1652	1,18	1664	1,18	1807	1,08
	Z6	1887	1944	0,97	1292	1,46	1564	1,21	1615	1,17	1832	1,03

Na Tabela 4.6, além dos resultados obtidos pelo método proposto, foram incluídos os resultados obtidos pelos métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017). Ao avaliar os resultados, percebe-se que ambos os métodos apresentam resultados mais conservadores. No método de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012), os valores da relação  $V_u/V_{RIZK}$  variam de 1,27 a 2,36, enquanto no método de LYCKA e STEPANEK (2017), os valores da relação  $V_u/V_{LYCKA}$  variam de 1,09 a 2,94.

Tabela 4.6 – Comparativo entre os resultados das previsões dos métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017) e do método proposto

Autores	Lajes	$V_u$ (kN)	$V_{teo,mét}$ (kN)	$V_u/V_{teo,mét}$	$V_{RIZK}$ (kN)	$V_u/V_{RIZK}$	$V_{LYCKA}$ (kN)	$V_u/V_{LYCKA}$
FERREIRA <i>et al.</i> (2021)	SR1	1580	1345	1,17	1240	1,27	1445*	1,09
CANTONE <i>et al.</i> (2019)	PC24	2150	2128	1,01	1061	2,03	1086*	1,98
FURCHE (2017)	DKA-O	2085	1511	1,38	956	2,18	839	2,49
	DKA-E	1975	1664	1,19	1488	1,33	861	2,29
HALVONIK e MAJTANOVA (2018)	S1-1	1520	1287	1,18	644	2,36	691	2,20
	S2-1	1250	899	1,39	684	1,83	554	2,26
EINPAUL <i>et al.</i> (2016)	PR1	1654	1556	1,06	895	1,85	930*	1,78
LIPS, RUIZ e MUTTONI (2012)	PL6	1363	1255	1,09	778	1,75	629	2,17
	PL7	1773	1863	0,95	1099	1,61	1074*	1,65
MUTTONI e BUJNAK (2012)	PP4	2076	1920	1,08	1021	2,03	913*	2,27
	PP5	1812	1989	0,91	1018	1,78	932*	1,94
BEUTEL (2002)	Z2	1375	996	1,38	875	1,57	521	2,64
	Z4	1579	1200	1,32	835	1,89	584	2,71
	Z5	1957	1480	1,32	1041	1,88	684	2,86
	Z6	1887	1944	0,97	934	2,02	642	2,94

Os valores de  $V_u/V_{RIZK}$  e  $V_u/V_{LYCKA}$  podem ter sido avaliados de forma imprecisa pela falta de informações acerca de algumas variáveis utilizadas nesses métodos. No método de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012), é essencial conhecer o ângulo  $\theta$  do plano de ruptura em relação ao eixo da laje, informação que deve ser obtida experimentalmente. Na ausência dessa informação, o ângulo foi considerado constante, igual a  $30^\circ$ . Além disso, o valor da resistência ao esmagamento do concreto fissurado ( $f_{cu}$ ) foi calculado como  $0,85f_c$ , devido à falta de dados sobre a deformação por tração do concreto fissurado.

Para aplicar o método de LYCKA e STEPANEK (2017), é necessário conhecer o valor do módulo de elasticidade do concreto para cada laje. No entanto, muitos autores não fornecem esse valor. Nos casos em que essa informação não estava disponível, utilizou-se a equação do módulo de elasticidade proposta pela ABNT NBR 6118 (2023), dada por  $E_c = 5600\sqrt{f_c}$ .

Também é relevante salientar que o método proposto por LYCKA e STEPANEK (2017) faz a previsão do modo de ruptura. Entretanto, os autores previram que apenas as lajes marcadas com um asterisco (\*) na Tabela 4.6 falharam devido ao esmagamento da biela. Assim, observa-se que o método não possui uma previsão precisa da ruptura.

Os resultados da razão da carga de ruptura experimental com a teórica ( $V_u/V_{teo}$ ) de todos os métodos de previsão são ilustrados nas Figuras 4.6 e 4.7. Além disso, são mostrados valores de parâmetros estatísticos como a média dos resultados, o desvio padrão e o coeficiente de variação.

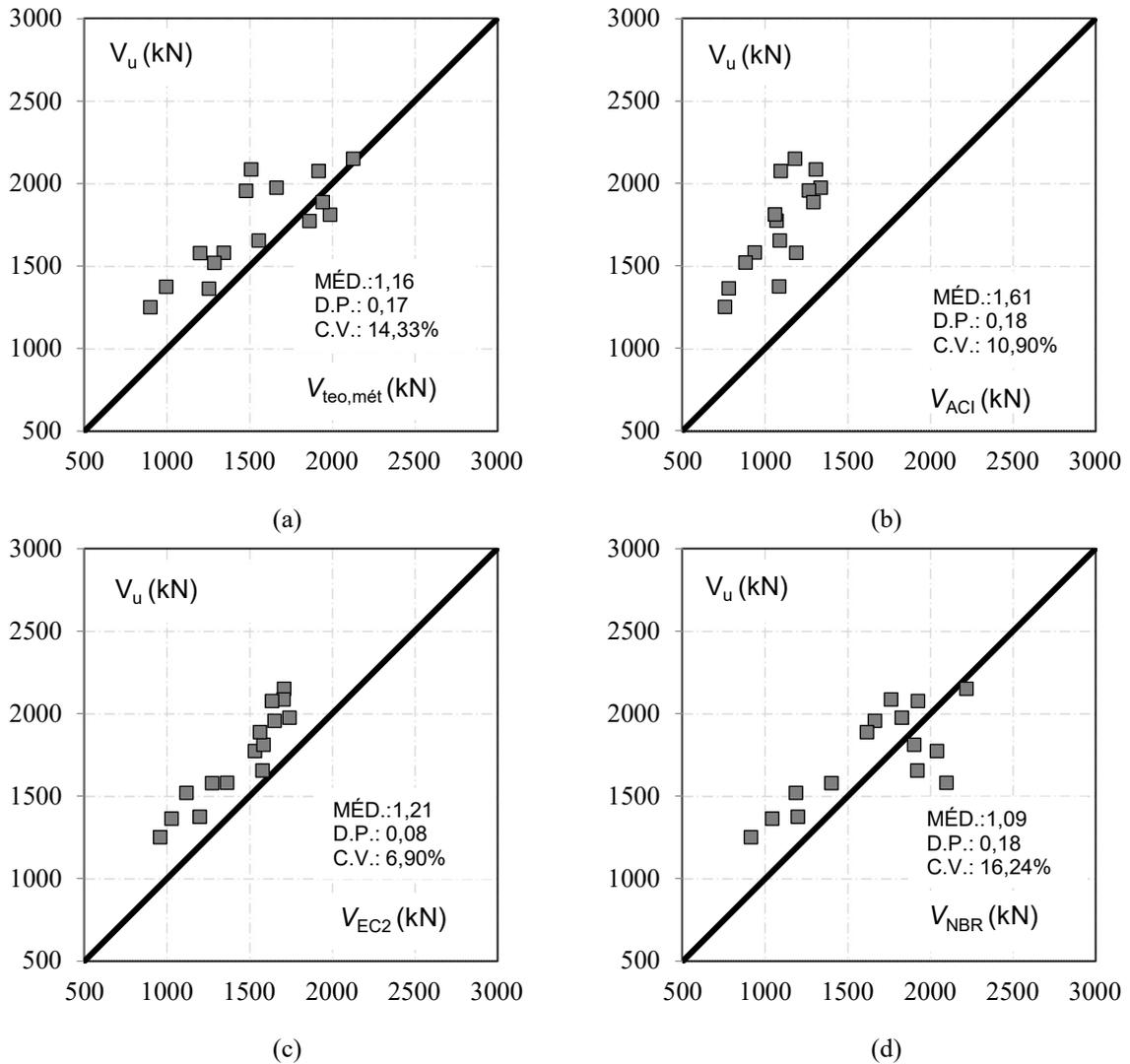


Figura 4.6 – Precisão dos métodos na resistência máxima à punção: (a) Método proposto; (b) ACI 318 (2019); (c) Eurocode 2 (2023); (d) ABNT NBR 6118 (2023)

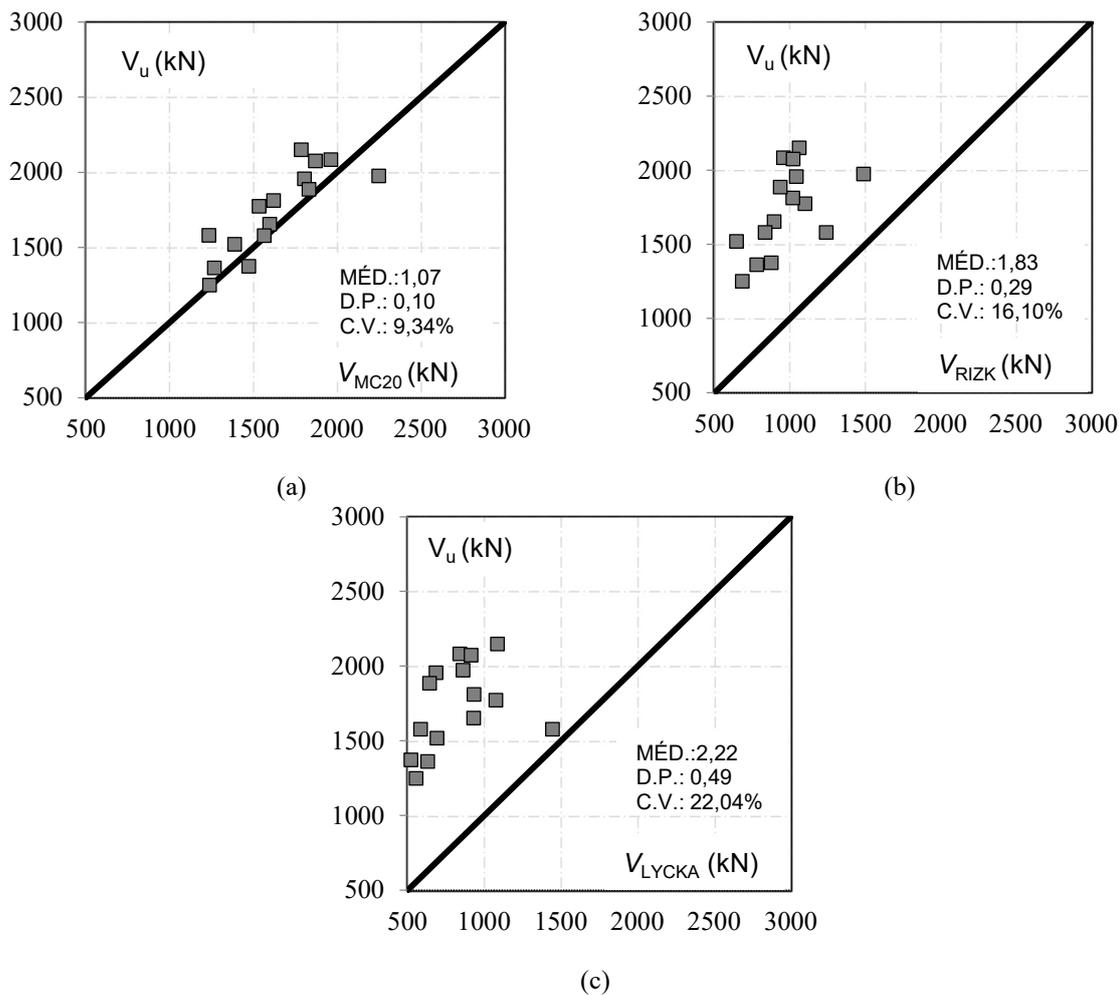


Figura 4.7 – Precisão dos métodos na resistência máxima à punção: (a) *fib* Model Code 2020 (2023); (b) RIZK, MARZOUK e TILLER (2012); (c) LYCKA e STEPANEK (2017)

A Tabela 4.7 apresenta um resumo dos valores dos parâmetros estatísticos, incluindo a média, o desvio padrão, o coeficiente de variação e a porcentagem de resultados em que a razão entre a carga de ruptura experimental e a teórica foi menor que um ( $V_u/V_{teo} < 1$ ), indicando os casos em que a resistência teórica superou a resistência experimental. Esses resultados foram obtidos a partir de todos os métodos de previsão analisados nesta pesquisa, com o objetivo de avaliar o desempenho das equações que preveem a resistência máxima à punção.

Tabela 4.7 – Resumo dos parâmetros estatísticos obtidos através dos métodos

Recomendações	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação (%)	$V_u/V_{teo} < 1$ (%)
ACI 318 (2019)	1,61	0,18	10,90	0,00
Eurocode 2 (2023)	1,21	0,08	6,90	0,00
ABNT NBR 6118 (2023)	1,09	0,18	16,24	33,3
fib Model Code 2020 (2023)	1,07	0,10	9,34	13,3
MÉTODO PROPOSTO (2024)	1,16	0,17	14,33	20,0
RIZK, MARZOUK e TILLER (2012)	1,83	0,29	16,10	0,00
LYCKA e STEPANEK (2017)	2,22	0,49	22,04	0,00

Ao analisar os resultados, observa-se que, de modo geral, as previsões do ACI 318 (2019), RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017) tendem a apresentar médias mais elevadas (variando de 1,61 a 2,22) e maior dispersão nos resultados, com desvio padrão variando de 0,18 a 0,49. Isso mostra que essas abordagens são mais conservadoras e menos precisas para prever a resistência máxima à punção.

As previsões que se destacaram foram as do Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023), fib Model Code 2020 (2023) e o método proposto. No entanto, é importante notar que a ABNT NBR 6118 (2023) apresentou a maior porcentagem de resultados em que a resistência teórica foi maior que a resistência experimental (33,3%). Isso ocorre devido ao fato desta norma calcular a resistência máxima com base na analogia de viga para o esmagamento da biela, que considera apenas a resistência à compressão do concreto, o que frequentemente leva à superestimação desse parâmetro.

O novo Eurocode 2 (2023) e o fib Model Code 2020 (2023), que estimam a resistência máxima à punção através da multiplicação de uma constante pela resistência à punção de laje lisa sem armadura de cisalhamento, apresentaram resultados estatísticos satisfatórios, com faixas de dispersão semelhantes. Os resultados mostraram médias de 1,21 e 1,07 e desvio padrão de 0,08 e 0,10, respectivamente. Entretanto, o fib Model Code 2020 (2023) teve 13,3% de casos em que a resistência teórica superou a resistência experimental. Embora esses métodos apresentem resultados estatísticos satisfatórios, sua aplicação é complexa e, no caso do fib Model Code 2020 (2023), ainda são necessárias iterações para a obtenção dos resultados desejados.

O método proposto também apresentou resultados satisfatórios, com média de 1,16, desvio padrão de 0,17 e coeficiente de variação 14,33%, apesar de registrar 20% de resultados em que

a resistência teórica foi maior que a resistência experimental. Diferentemente dos métodos anteriores, este método utiliza formulações diretas e fáceis de aplicar, não exigindo iterações.

Na Figura 4.8, a dispersão dos resultados é ilustrada por meio da curva “*box and whiskers*”, que exhibe os valores mínimo, máximo, primeiro quartil (Q1), segundo quartil ou mediana (Q2) e terceiro quartil (Q3). A dispersão dos dados é indicada pelo intervalo interquartil, que é a diferença entre o terceiro e o primeiro quartil (tamanho da caixa). Analisando os intervalos interquartílicos, observa-se que as recomendações menos dispersas e que permaneceram em um intervalo de  $V_u/V_{teo}$  maior que 1 e menor que 1,5 foram as normas *fib Model Code 2020 (2023)*, Eurocode 2 (2023) e o método proposto. Nota-se que a ABNT NBR 6118 (2023) também teve a maior parte do tamanho da caixa nesse intervalo, embora o valor do primeiro quartil tenha sido menor que 1.

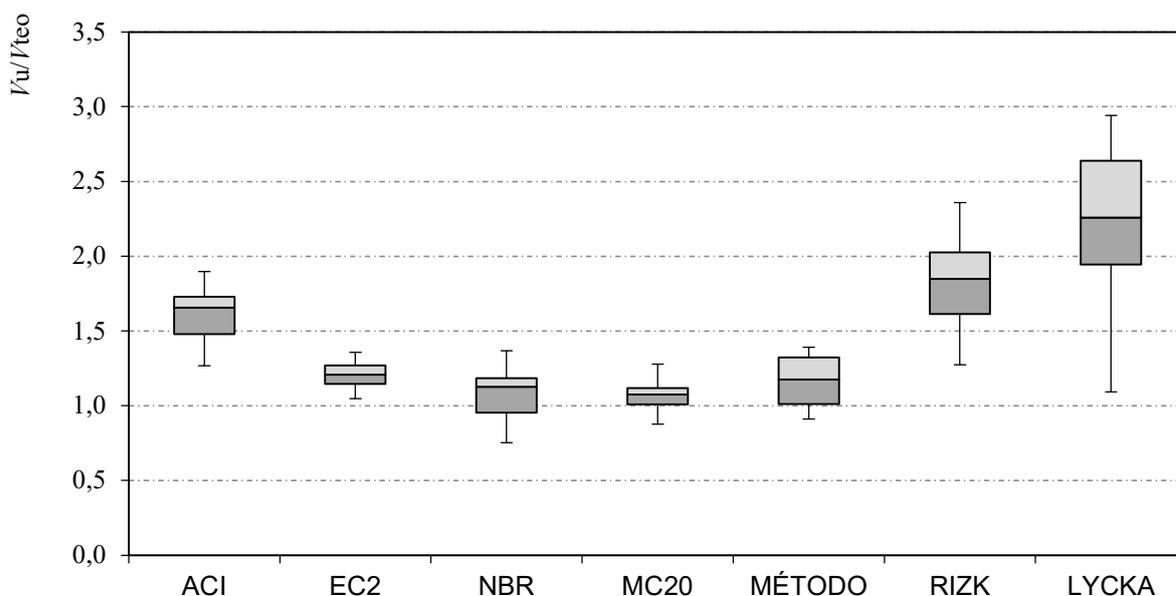
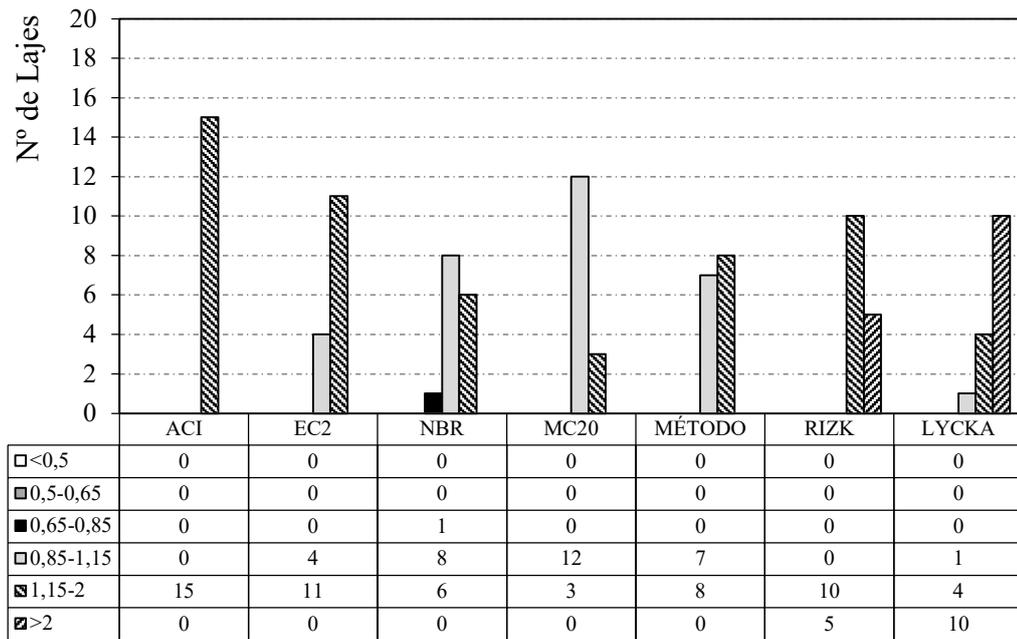


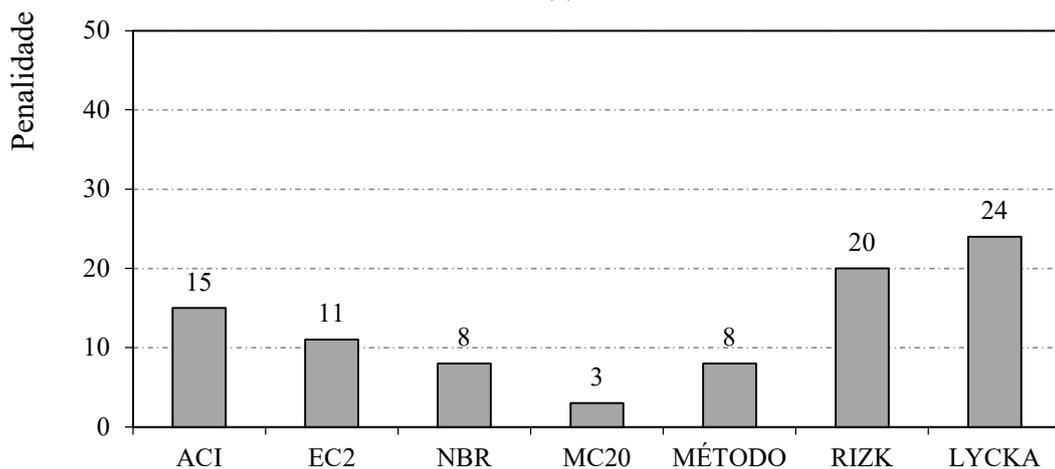
Figura 4.8 – Análise quanto à dispersão (curva “*box and whiskers*”)

Os resultados da análise segundo o critério de COLLINS (2001) estão apresentados na Figura 4.9. Conforme mencionado anteriormente, os métodos ACI 318 (2019), RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017) mostraram-se as previsões mais conservadoras. Na Figura 4.9a, observa-se que esses métodos permaneceram nas categorias conservador e extremamente conservador, sendo, portanto, os mais penalizados pelo DPC, conforme apresentado na Figura 4.9b. Os métodos que receberam menores penalidades foram o Eurocode 2 (2023), a ABNT NBR 6118 (2023), o *fib Model Code 2020 (2023)* e o método proposto. Entre eles, o Eurocode 2 (2023) foi o mais penalizado, pois permaneceu

majoritariamente na categoria conservador. O fib Model Code 2020 (2023) se destacou ao apresentar a maior parte dos resultados na classe de segurança adequada, recebendo assim a menor penalização. O método proposto e a ABNT NBR 6118 (2023) registraram o mesmo número de penalidades. No entanto, o método proposto permaneceu na categoria de segurança adequada e conservadora, enquanto a ABNT NBR 6118 (2023) apresentou um resultado de baixa segurança.



(a)



(b)

Figura 4.9 – Resultado do critério de COLLINS (2001) das lajes: (a) distribuição das lajes; (b) penalidade de Collins

## 5. CONCLUSÃO

O presente estudo proporcionou uma revisão abrangente de diferentes modelos de bielas e tirantes, bem como métodos normativos disponíveis na literatura para lajes lisas de concreto armado. Além disso, foi apresentada uma metodologia para verificar a resistência ao esmagamento da biela de concreto em lajes lisas com armadura de cisalhamento tipo stud, disposta simetricamente em arranjos radiais ao redor do pilar.

A avaliação da eficácia do método proposto foi realizada em uma base de dados composta por 15 lajes lisas que falharam na resistência máxima à punção, conforme disponível na literatura científica. Ademais, os métodos normativos, incluindo ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), ABNT NBR 6118 (2023), fib Model Code 2020 (2023), bem como os métodos desenvolvidos por RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e LYCKA e STEPANEK (2017), foram comparados com o método proposto através de análises estatísticas, análise da dispersão dos resultados e penalizações segundo o “Demeter Points Classification” (DPC).

Os métodos de RIZK, MARZOUK e TILLER (2012) e de LYCKA e STEPANEK (2017) foram aqueles que apresentaram a maior razão entre a carga de ruptura experimental e a teórica, sendo, por isso, os mais penalizados pelo DPC. Somado a isso, essas previsões foram as mais dispersas, conforme mostrado pela curva “*box and whiskers*”. Como já mencionado, a incerteza em relação a alguns parâmetros utilizados nesses métodos, como o módulo de elasticidade do concreto, o ângulo do plano de ruptura e o valor da resistência ao esmagamento do concreto fissurado, pode ter comprometido os resultados, tendo em vista que essas variáveis foram estimadas, devido à ausência de algumas dessas informações na base de dados.

Entre as recomendações normativas, o ACI 318 (2019) apresentou resultados mais conservadores, com uma média relativamente alta e um desvio padrão considerável, resultando em uma penalização significativa pelo DPC. Enquanto isso, o Eurocode 2 (2023) apresentou menores resultados de média, desvio padrão e penalização pelo critério de COLLINS (2001), mantendo-se ainda na categoria conservador. Porém, vale ressaltar que, conforme a curva “*box and whiskers*”, a nova previsão do Eurocode 2 (2023), assim como o fib Model Code 2020 (2023), demonstrou baixo valor de dispersão dos resultados.

O novo Eurocode 2 (2023) modificou a forma de previsão com base em uma simplificação do fib Model Code 2020 (2023), estimando a carga de ruptura pela multiplicação de um fator, que

depende do tipo de armadura de cisalhamento e da relação entre o perímetro do pilar e a altura útil da laje, pela resistência à punção de laje lisa sem armadura de cisalhamento.

No Eurocode 2 (2004), assim como na ABNT NBR 6118 (2023), a previsão da resistência máxima é realizada por meio da analogia do esmagamento da biela em vigas, que por sua vez, geralmente, superestima a contribuição do concreto na resistência da biela. Isso é evidenciado pelos resultados obtidos a partir da ABNT NBR 6118 (2023), que apresentou cinco valores em que a resistência teórica superou a resistência experimental. Todavia, esta ainda se manteve, predominantemente, na categoria de segurança apropriada pelo DPC [0,85-1,15], apresentando o mesmo número de penalizações que o método proposto.

O *fib Model Code 2020* (2023), apesar de possuir dois resultados em que a resistência teórica foi maior que a resistência experimental, destacou-se ao apresentar a maior parte dos valores situados na categoria de segurança adequada, promovendo a menor penalização do DPC, além de resultados estatísticos satisfatórios. Entretanto, essa norma baseia suas equações para a resistência à punção na teoria da fissura crítica de cisalhamento de MUTTONI e SCHWARTZ (1991), MUTTONI (2008) e RUIZ e MUTTONI (2009), que afirmam que a resistência à punção diminui com o aumento da rotação da laje, dada em razão da carga aplicada e da resistência à flexão da laje. Como a resistência da laje é função da carga aplicada, o problema deve ser resolvido de forma iterativa até que a carga resistente seja igual a solicitante, o que torna o método de difícil aplicação.

O método proposto apresentou três resultados em que a resistência teórica superou a resistência experimental. No entanto, segundo o critério de COLLINS (2001), esses resultados permanecem na categoria de segurança apropriada. A análise estatística confirmou a eficácia do método, com bons resultados estatísticos. A curva “*box and whiskers*” demonstrou que o método proporciona baixa dispersão dos resultados, com os valores do primeiro e terceiro quartil situados entre de 1 e 1,5.

Em síntese, o método propõe uma abordagem inovadora e significativa para a verificação da resistência máxima à punção em lajes lisas, contribuindo decisivamente para o projeto de estruturas mais seguras. Este método mostrou-se seguro, eficaz e preciso, comparativamente aos demais métodos analisados. Além disso, destacou-se por incorporar variáveis críticas no cálculo da resistência ao esmagamento da biela, como a resistência à compressão do concreto, a posição da primeira camada de armadura de cisalhamento, o ângulo de inclinação da biela, a

dimensão do pilar e a altura útil da laje. Os testes estatísticos realizados validam a proposta de cálculo, enfatizando sua confiabilidade e aplicabilidade prática.

### **5.1. SUGESTÕES PARA ATIVIDADES FUTURAS**

Para complementar os resultados e conclusões apresentados neste trabalho, sugere-se a realização das seguintes atividades:

- Aplicar o método proposto em um programa experimental;
- Avaliar a influência de parâmetros como resistência à compressão do concreto, taxa de armadura de cisalhamento, taxa de armadura de flexão, dimensão do pilar e altura útil, e propor possíveis melhorias no método;
- Expandir a metodologia proposta, considerando armaduras de cisalhamento do tipo estribo e distribuição em cruz.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318: Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) and Commentary**. Farmington Hills, EUA, 2019.

ANDRA, H. P.; BAUR, H.; STIGLAT, K. **Zum Tragverhalten, Konstruieren und Bemessen von Flachdecken**. Beton- und Stahlbetonbau, Band: 79, Heft-Nr. 10, 11, 12, Seiten: 258-263, 303-310, 328-334, 1984.

ANDRA, H. P.; DILGER, W. H.; GHALI, A. **Durchstanzbewehrung für Flachdecken**. Beton und Stahlbetonbau. v. 74, n. 5, p. 129-132, 1979.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto**. Rio de Janeiro, 2023.

BEUTEL, R. **Punching of Flat Slabs with Shear Reinforcement at Inner Colluns**. Alemanha, 2002. (em Alemão).

BRANTSCHEN, F. **Influence of bond and anchorage conditions of the shear reinforcement on the punching strength of RC slabs**. 2016. 227 f. Tese de doutorado. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2016.

CANTONE, R.; RUIZ, M. F.; BUJNAK, J.; MUTTONI, A. **Enhancing punching strength and deformation capacity of flat slabs**. ACI Structural Journal, v. 116, n. 5, p. 261–274, 2019.

CEN EN 1992-1-1. **Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**. CEN, EN 1992-1-1, Brussels, Belgium, 2004.

CEN EN 1992-1-1/AC. **Corrigendum AC – Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**. CEN, EN 1992-1-1, Brussels, Belgium, 2010.

CEN EN 1992-1-1:2004/prA1:2013. **Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1 General Rules and Rules for Buildings**. Brussels, Belgium. 2014.

CEN FprEN 1992-1-1. **Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, Bridges and Civil Engineering Structures**. Final Draft. 2023.

CLASSEN, M.; KALUS, M. **Punching Shear Response Theory (PSRT) – A two degree of freedom kinematic theory for modeling the entire punching shear vs. deformation response of RC slabs and footings.** Engineering Structures 291, 2023.

Comité Euro-International Du Béton. **CEB-FIP Model Code 1990.** London, Thomas Telford. 1993.

COLLINS, M.P. **Evaluation of shear design procedures for concrete structures.** A Report prepared for the CSA technical committee on reinforced concrete design, 2001.

CSA-A23.3-04. **Design of Concrete Structures for Buildings.** Canadian Standards Association, Rexdale, ON, Canada, p. 258, 2004.

EINPAUL, J.; BRANTSCHEN, F.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. **Performance of Punching Shear Reinforcement under Gravity Loading: Influence of Type and Detailing.** ACI Structural Journal, v. 113, n. 4, p. 827-838, 2016.

ELIGEHAUSEN, R.; BOUSKA, P.; CERVENKA, V.; PUKL, R. **Size effect of the concrete cone failure load of anchor bolts.** In: Bazant, Z. P. (Editor), Fracture Mechanics of Concrete Structures, pp. 517–525, Elsevier Applied Science, London, New York, 1992.

ELIGEHAUSEN, R.; SAWADE, G. **A fracture mechanics based description of the pull-out behavior of headed studs embedded in concrete.** Fracture Mechanics of Concrete Structures, From Theory to Applications. Editors: Elfgren, L., Chapman and Hall, London, New York,. pp. 281-299, 1989.

FERREIRA, M. P. **Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados.** Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2010.

FERREIRA, M. P.; PEREIRA FILHO, M. J. M.; FREITAS, M. V. P.; LIMA NETO, A. F.; MELO, G. S. S. A. **Experimental resistance of slab-column connections with prefabricated truss bars as punching shear reinforcement.** Engineering structures, v. 233, 2021.

*fib* Model Code 2010. **Model Code 2010: Model code for concrete structures 2010.** Lausanne: Special Activity Group 5, 2013.

*fib* Model Code 2020. **Model Code 2020: Model code for concrete structures 2020.** Lausanne, 2023.

FRAILE, D. H.; SIMÕES, J. T.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. **A mechanical approach for the maximum punching resistance of shear-reinforced slab-column connections.** *fib* Symposium 2021, Lisbon, Portugal, June 14-16, 2021.

FURCHE, J. **Slab-column connection with effective lattice shear reinforcement.** International Symposium on Connections between Steel and Concrete, n. October, p. 912–924, September 27-29, 2017.

GUANDALINI, S. **Symmetric Punching Shear of Reinforced Concrete Slabs.** Doctoral Thesis, French, Lausanne, Switzerland: EPFL; 3380, 289, 2005.

HALVONIK, J.; MAJTANOVÁ, L. **Experimental Investigation of the Maximum Punching Resistance of Slab-Column Connections.** Slovak Journal of Civil Engineering, v. 26, n. 3, p. 22–28, 2018.

HEGGER, J.; HAUSLER, F.; RICKER, M. **Zur maximalen Durchstanztragfähigkeit von Flachdecken.** Beton- und Stahlbetonbau, v 102, N<sup>o</sup>.11, p. 770-777, 2007.

KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. **Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement.** Transactions N<sup>o</sup> 158, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1960.

LIPS, S. **Punching of Flat Slabs with Large Amounts of Shear Reinforcement.** Tese de Doutorado. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suíça, 2012.

LIPS, S.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. **Experimental investigation on punching strength and deformation capacity of shear-reinforced slabs.** ACI Structural Journal, v. 109, n. 6, p. 889–899, 2012.

LYCKA, L.; STEPANEK, P. **A Method to Predict the Punching Shear Strength of Flat Slabs with Shear Reinforcement Using a Strut-and-Tie Model.** Key Engineering Materials. v. 738, p. 25-35, 2017.

MELGES, J. L. P. **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental.** São Carlos, 217p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 1995.

MENETREY, Ph. **Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures. PhD Thesis.** Department of Civil Engineering, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 1994, 177 pp.

MENETREY, Ph. **Punching shear in reinforced concrete: Localized process.** In: Computational Modelling of Concrete Structures: Proceedings of the EURO-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures, Badgastein, Austria, 31 March-3 April 1998. CRC Press, p. 867. 1998.

MOKHTAR, A. S.; GHALI, A.; DILGER, W. **Stud Shear Reinforcement for Flat Concrete Plates.** ACI Journal Proceedings, Set-Out. p. 676-683, 1985.

MUTTONI, A. **Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Flat Slabs Without Transverse Reinforcement.** ACI Structural Journal, v. 105, n. 4, p. 440-450, 2008.

MUTTONI, A.; BUJNAK, J. **Performance of Slabs Reinforced by Peikko psb Studs.** Concrete Connections, v. 2, p. 16-21, 2012.

MUTTONI, A; RUIZ, M. F. **Performance and Design of Punching Shear Reinforcing Systems.** 3rd *fib* International Congress, 2010.

MUTTONI, A; SCHWARTZ, J. **Behavior of Beams and Punching in Slabs Without Shear Reinforcement.** IABSE Colloquium, v. 62, Zurique, Suíça, p. 485-491, 1991.

NASCIMENTO, A. J. C. **Método da Superfície de Resistência Mínima ao Cisalhamento para Ligações Laje-Pilar com Armadura de Punção.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Pará, 2020.

OZBOLT, J. e ELIGEHAUSEN, R. **Numerical analysis of headed studs embedded in large plain concrete blocks.** Proceedings of the 2nd International Conference of Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, pp.465-656, 1990.

PEREIRA FILHO, M. J. M. **Resistência à punção de lajes lisas armadas ao cisalhamento com estribos treliçados pré-fabricados**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2021.

REGAN, P. E. **Shear Reinforcement of Reinforced Concrete Flat Slabs**. Correspondência com o autor, 1994.

REGAN, P. E.; SAMADIAN, F. **Shear reinforcement against punching in reinforced concrete flat slabs**. *Structural Engineer*, v. 79, n. 10, p. 24–31, 2001.

RIZK, E.; MARZOUK, H.; TILLER, R. **Design of Thick Concrete Plates Using Strut-and-Tie Model**, *ACI Structural Journal*. v. 109, p. 677-685, 2012.

RUIZ, M. F; MUTTONI, A. **Applications of critical shear crack theory to punching of reinforced concrete slabs with transverse reinforcement**. *ACI Structural Journal*, v. 106, n. 4, p. 485-494, 2009.

RUIZ, M. F.; MUTTONI, A.; KUNZ, J. **Strengthening of flat slabs against punching shear using post-installed shear reinforcement**. *ACI Structural Journal*, v. 107, n. Jul-Aug, p. 434–42, 2010.

SHEHATA, I. A. E. M. **Simplified model for estimating the punching resistance of reinforced concrete slabs**. *Materials and Structures*. v. 23, p. 364-371, 1990.

SHEHATA, I. A. E. M. **Theory of punching in concrete slabs**. PhD thesis, Polytechnic of Central London, UK, 1985.

SILVA, R. C.; GIONGO, J. S. **Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado**. São Carlos: EESC-USP, 2000.

SIQUEIRA, J. P. A. **Análise Experimental da Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armadura de Cisalhamento Tipo Estribo Aberto**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-04A/21, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 195p. 2021.

ZHOU, P.; BARR, B.; LYDON, F. **Fracture Properties of High Strength Concrete with Varying Silica Fume Content and Aggregates**. Cement and Concrete Research, v. 25, n. 3, p. 543-552, 1995.

## APÊNDICE A - MEMORIAL DE CÁLCULO DO MÉTODO PROPOSTO

Dados: Laje PC24

$$h = 250 \text{ cm}$$

$$d = 209 \text{ cm}$$

$$c = 260 \text{ (seção quadrada)}$$

$$f_c = 37 \text{ MPa}$$

$$\rho_w = 1.35 \%$$

$$\phi_w = 16 \text{ mm}$$

$$n_L = 12$$

$$n_C = 6$$

$$s_0 = 80 \text{ mm}$$

$$s_R = 105 \text{ mm}$$

$$f_y = 570 \text{ MPa}$$

$$c_h = 20 \text{ mm}$$

$$r_q = 1100 \text{ mm}$$

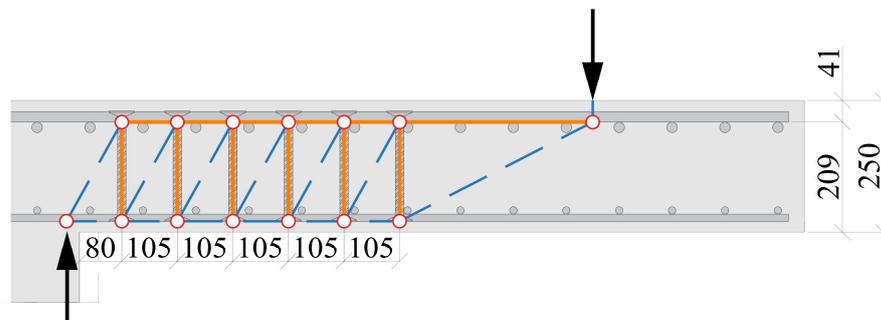
$$\phi = 20 \text{ mm}$$

$$\rho = 1.50 \%$$

$$s = 100 \text{ mm}$$

$$V_u = 2150 \text{ kN}$$

### 1) Modelo de bielas e tirantes



Modelo de treliça da laje PC24

### 2) Cálculo do diâmetro equivalente

$$D = \frac{4 \cdot c}{\pi} = \frac{4 \cdot 260}{\pi} = 331 \text{ mm}$$

### 3) Cálculo do centro de carga

$$C_q = D \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) = 331 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) = 60 \text{ mm}$$

4) Cálculo do bloco de compressão

$$n_b = \frac{D}{s} = \frac{331}{100} \cong 3 \text{ barras}$$

$$F_c = F_s = n_b \cdot A_b \cdot f_y$$

$$F_c = F_s = 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 20^2}{4}\right) \cdot \frac{570}{1000} = 537 \text{ kN}$$

$$x = \lambda \frac{F_c}{\alpha \cdot f_c \cdot D} = 0,8 \cdot \frac{537}{0,85 \cdot \frac{37}{1000} \cdot 331} = 41 \text{ cm}$$

5) Dimensão limite do nó

$$L = \text{menor} \begin{cases} L_1 = \frac{\left(\frac{C}{2} + s_0\right) \cdot \frac{u_0}{n_L}}{\frac{D}{2}} \\ L_2 = \begin{cases} s_r, & \text{se } s_0 \geq s_r/2 \\ 2s_0, & \text{se } s_0 < s_r/2 \end{cases} \\ L_3 = d_h + 2 \sqrt{\frac{y^2}{\cos^2 55^\circ} - y^2} \end{cases}$$

$$L = \text{menor} \begin{cases} L_1 = \frac{\left(\frac{260}{2} + 80\right) \cdot \frac{\pi \cdot 331}{12}}{\frac{331}{2}} \cong 110 \text{ mm} \\ L_2 = \begin{cases} s_r = 105, & \text{se } 80 \geq \frac{105}{2} = 52,5 \\ 2s_0 = 160, & \text{se } 80 < \frac{105}{2} = 52,5 \end{cases} \quad \therefore L_2 = 105 \text{ mm} \\ L_3 = 3 \cdot (16) + 2 \sqrt{\frac{(250 - 209 - 20)^2}{\cos^2 55^\circ} - (250 - 209 - 20)^2} \cong 108 \text{ mm} \end{cases}$$

$$L = 105 \text{ mm}$$

6) Dimensão da biela

$$\theta = \arctg \left( \frac{d - \frac{x}{2}}{\frac{D}{2} + \frac{C}{2} + C_q + s_0} \right)$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{209 - \frac{41}{2}}{\frac{331}{2} + \frac{260}{2} + 60 + 80} \right) = 61^\circ$$

$$L = 105 \text{ mm}$$

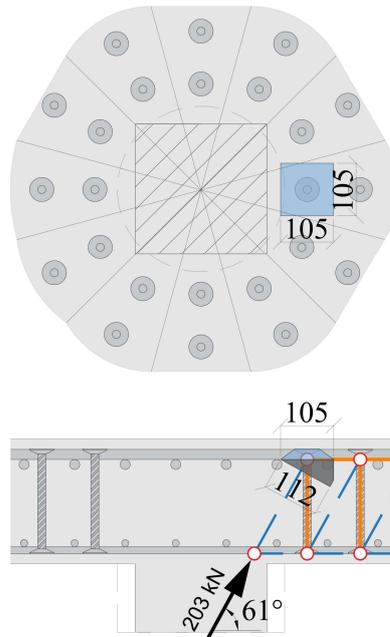
$$w_s = L \cdot \text{sen}(\theta) + (h - d) \cdot \text{cos}(\theta)$$

$$w_s = 105 \cdot \text{sen}(61) + (250 - 209) \cdot \text{cos}(61) \cong 112 \text{ mm}$$

7) Cálculo da força resistente da biela

$$F_R = w_s \cdot L \cdot f_{cs}$$

$$F_R = 112 \cdot 105 \cdot 17.3/1000 \cong 203 \text{ kN}$$



Força resistente da biela, dimensão do nó e da biela

8) Cálculo da carga vertical de um segmento de laje

$$V = F_R \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$V = 203 \cdot \text{sen}(61) = 177 \text{ kN}$$

9) Cálculo da força resistente teórica da laje

$$V_{teo} = n_L \cdot V$$

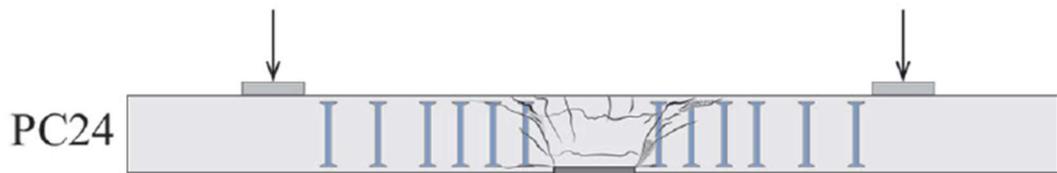
$$V_{teo} = 12 \cdot 177 = 2128 \text{ kN}$$

10) Razão  $V_u/V_{teo}$

$$\frac{V_u}{V_{teo}} = \frac{2150}{2128} = 1.01$$

## ANEXO A – CORTES DAS LAJES DO BANCO DE DADOS

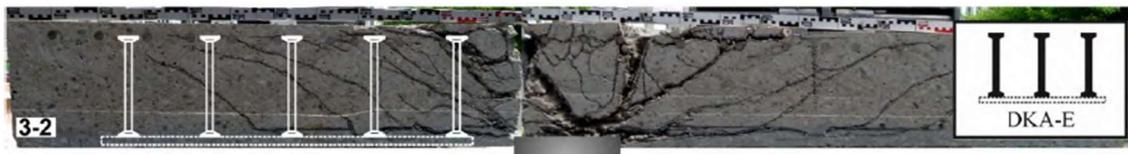
A seguir, são apresentados os cortes das lajes do banco de dados nos casos em que foram disponibilizados pelo autor.



Desenho do corte da laje PC24 (CANTONE *et al.*, 2019)



Corte da laje DKA-O (FURCHE, 2017)



Corte da laje DKA-E (FURCHE, 2017)



Corte da laje S2-1 (HALVONIK e MAJTANOVA, 2018)

**PR1**



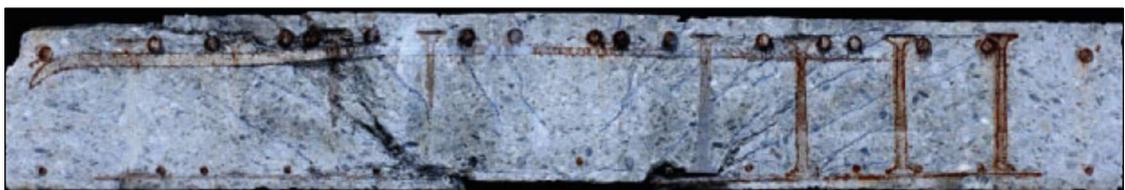
Desenho do corte da laje PR1 (EINPAUL *et al.*, 2016)



Corte da laje PL6 (LIPS, 2012)



Corte da laje PL7 (LIPS, 2012)



Corte da laje PP4 (MUTTONI e BUJNAK, 2012)



Corte da laje PP5 (MUTTONI e BUJNAK, 2012)



Corte da laje Z2 (BEUTEL, 2002)



Corte da laje Z4 (BEUTEL, 2002)



Corte da laje Z5 (BEUTEL, 2002)



Corte da laje Z6 (BEUTEL, 2002)